פתרון מבחן מס' 18 (ספר מבחנים – שאלון 035806)

(1) נסמן ב- x קמ"ש את מהירות הטנדר.

ב- 20 דקות הטנדר עובר מרחק של $\frac{x}{3}$ ק"מ.

המהירות היחסית של המכונית ביחס לטנדר היא $45-x$ קמ"ש,

לכן המכונית תעקוף את הטנדר אחרי $t=\frac{\frac{x}{3}}{45-x}$ שעות.

בזמן זה, שני הרכבים יעברו מרחק של: $\frac{15x}{45-x}$ ק"מ $\ell = 45\cdot\frac{\frac{x}{3}}{45-x}=$

לפי הנתון, הזמן שלקח למכונית לעבור חצי המרחק עד הקיבוץ בדרך חזרה,

שווה לזמן שבו הטנדר הגיע לחיפה. מכאן:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{15x}{45-x}:45=\left(40-\frac{15x}{45-x}\right):x$$

$$\frac{x}{6\,(45-x)}=\frac{1{,}800-55x}{x\,(45-x)} \quad\Rightarrow\quad x^2=10{,}800-330x$$

$$x^2+330x-10{,}800=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-330\pm 390}{2} \quad\Rightarrow\quad x_1=30\ ,\ x_2=-360$$

הפתרון $x_2=-360$ נפסל, כי מהירות היא גודל חיובי.

תשובה: מהירות הטנדר היא 30 קמ"ש.

(2) (א)

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}+3}{\frac{1}{a_n}+3}=\frac{\frac{3a_n+2}{a_n}+3}{\frac{1}{a_n}+3}=\frac{(3a_n+2+3a_n)\cdot a_n}{a_n\,(1+3a_n)}=$$

$$=\frac{6a_n+2}{1+3a_n}=\frac{2\,(3a_n+1)}{1+3a_n}=2=\text{const}$$

הוכחנו כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית שמנתה שווה ל- 2.

(ב)

$$b_1=\frac{1}{a_1}+3=\frac{1}{-1}+3=2$$

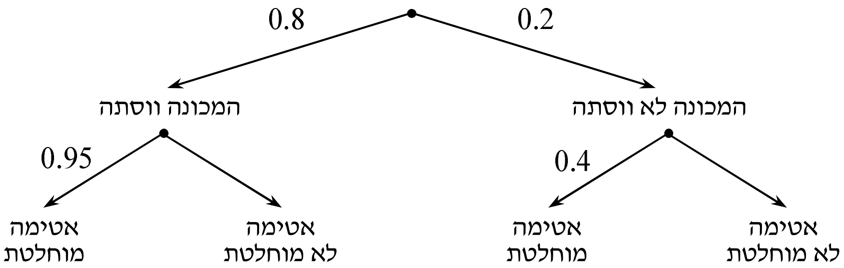
$$b_n=b_1\cdot q^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

$$b_n=\frac{1}{a_n}+3 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{a_n}=b_n-3 \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{1}{b_n-3}$$

$$a_n=\frac{1}{2^n-3}$$

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035806

(3) נבנה דיאגרמת עץ לפי נתוני השאלה.



(א) $P(\text{המכונה לא ווסתה}) = 1 - P(\text{המכונה ווסתה}) = 1 - 0.8 = 0.2$

(i)
$$P(\text{3 מתוך 3 אטימה מוחלטת}) =$$
$$= P(\text{ווסתה}) \cdot P^3(\text{אטימה מוחלטת / ווסתה}) +$$
$$+ P(\text{לא ווסתה}) \cdot P^3(\text{אטימה מוחלטת / לא ווסתה}) =$$
$$= 0.8 \cdot 0.95^3 + 0.2 \cdot 0.4^3 = 0.6859 + 0.0128 = 0.6987$$

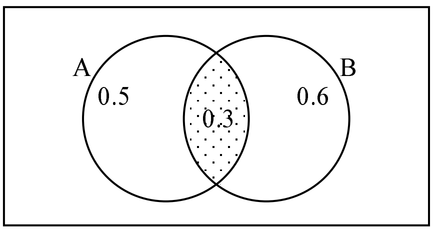
(ii)
$$P(\text{ווסתה / 3 מתוך 3 אטימה מוחלטת}) =$$
$$= \frac{P(\text{ווסתה} \cap \text{3 מתוך 3 אטימה מוחלטת})}{P(\text{3 מתוך 3 אטימה מוחלטת})} = \frac{0.6859}{0.6987} \approx 0.9817$$

(ב) נגדיר מאורעות:

A – החודש יגדלו המכירות של קופסאות בגודל A ,

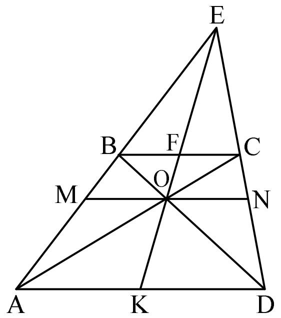
B – החודש יגדלו המכירות של קופסאות בגודל B .

נוח לראות את הפתרון בעזרת דיאגרמת וון.



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.6 - 0.3 = 0.8$$

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון **035806**



(4) (א) $BC \parallel AD$ בסיסים מקבילים בטרפז $ABCD$

$\Downarrow$

$\frac{BF}{AK} = \frac{EF}{EK}$ משפט תאלס ב- ΔAEK

$\frac{FC}{KD} = \frac{EF}{EK}$ משפט תאלס ב- ΔKED

$\Downarrow$

$(*)$ $\frac{BF}{AK} = \frac{FC}{KD}$ שני גדלים השווים לגודל שלישי, שווים ביניהם. מ.ש.ל. (א)

(ב) $CF \parallel KA$

$\Downarrow$

$\measuredangle FCO = \measuredangle OAK$ זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים

$\measuredangle FOC = \measuredangle KOA$ זוויות קדקודיות שוות

$\Downarrow$

$\Delta FOC \sim \Delta KOA$ לפי משפט דמיון ז.ז.

$\Downarrow$

$\frac{FC}{AK} = \frac{FO}{OK}$ פרופורציית צלעות מתאימות במשולשים דומים

$BF \parallel KD$

$\Downarrow$

$\measuredangle FBO = \measuredangle ODK$ זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים

$\measuredangle FOB = \measuredangle KOD$ זוויות קדקודיות שוות

$\Downarrow$

$\Delta FOB \sim \Delta KOD$ לפי משפט דמיון ז.ז.

$\Downarrow$

$\frac{BF}{KD} = \frac{FO}{OK}$ פרופורציית צלעות מתאימות במשולשים דומים

$\Downarrow$

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

$(**)$ $\quad \frac{FC}{AK}=\frac{BF}{KD}$ שני גדלים השווים לגודל שלישי,
שווים ביניהם. מ.ש.ל. (ב)

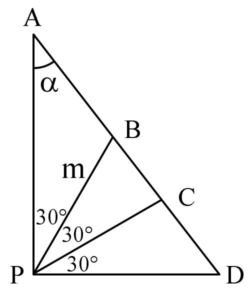
(ג) נחלק גדלים מתאימים ב- $(*)$ וב- $(**)$ ונקבל:

$$\frac{BF}{AK}:\frac{FC}{AK}=\frac{FC}{KD}:\frac{BF}{KD}$$

$$\frac{BF}{AK}\cdot\frac{AK}{FC}=\frac{FC}{KD}\cdot\frac{KD}{BF} \Rightarrow BF^2=FC^2 \Rightarrow BF=FC$$

נציב תוצאה זו ב- $(*)$ ונקבל:

$$\frac{BF}{AK}=\frac{BF}{KD} \Rightarrow AK=KD$$



(5) (א) לפי משפט הסינוסים ב- ΔAPB :

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ}=\frac{PB}{\sin \measuredangle A} \Rightarrow AB=\frac{m\cdot\frac{1}{2}}{\sin\alpha}=\frac{m}{2\sin\alpha}$$

$\measuredangle PBC=\alpha+30^\circ$ (זווית חיצונית ל- ΔABP).

לפי משפט הסינוסים ב- ΔPBC :

$$\frac{PC}{\sin\measuredangle PBC}=\frac{PB}{\sin\measuredangle BCP} \Rightarrow PC=\frac{m\ \sin(\alpha+30^\circ)}{\sin(120^\circ-\alpha)}$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔAPC :

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ}=\frac{PC}{\sin\measuredangle A}$$

$$AC=\frac{m\ \sin(\alpha+30^\circ)}{\sin(120^\circ-\alpha)}\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sin\alpha}=\frac{m\sqrt{3}\ \sin(\alpha+30^\circ)}{2\sin\alpha\sin(120^\circ-\alpha)}$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔPBD :

$$\frac{BD}{\sin 60^\circ}=\frac{PB}{\sin\measuredangle D}$$

$$BD=\frac{m\sin 60^\circ}{\sin(90^\circ-\alpha)}=\frac{m\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔPCD :

$$\frac{CD}{\sin 30^\circ}=\frac{PC}{\sin\measuredangle D}$$

$$CD=\frac{m\ \sin(\alpha+30^\circ)}{\sin(120^\circ-\alpha)}\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin(90^\circ-\alpha)}=\frac{m\ \sin(\alpha+30^\circ)}{2\cos\alpha\ \sin(120^\circ-\alpha)}$$

(ב) לפי סעיף (א) :

$$\frac{AC\cdot BD}{AB\cdot CD}=\frac{\frac{m\sqrt{3}\ \sin(\alpha+30^\circ)}{2\sin\alpha\sin(120^\circ-\alpha)}\cdot\frac{m\sqrt{3}}{2\cos\alpha}}{\frac{m}{2\sin\alpha}\cdot\frac{m\ \sin(\alpha+30^\circ)}{2\cos\alpha\ \sin(120^\circ-\alpha)}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$$

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון **035806**

(6) (א) אסימפטוטה אנכית מתקבלת כאשר המכנה שווה ל- 0 (ומכנה שונה מ- 0),

לכן המשוואות של האסימפטוטות האנכיות הן: $x=b$, $x=-b$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(3+\frac{ax^2+9}{x^2-b^2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(3+\frac{a-\frac{9}{x^2}}{1-\frac{b^2}{x^2}}\right)=3+a$$

מכאן משוואת האסימפטוטה האופקית היא: $y=a+3$.

(ב) $$f'(x)=\frac{2ax(x^2-b^2)-2x\,(ax^2+9)}{(x^2-b^2)^2}=\frac{-2ab^2x-18x}{(x^2-b^2)^2}=\frac{-2x\,(ab^2+9)}{(x^2-b^2)^2}$$

$$a\ ,\ b^2\ge 0\ \Rightarrow\ ab^2+9>0$$

$(x^2-b^2)^2>0$ לכל x בתחום ההגדרה ($x\neq\pm b$),

לכן $\frac{2\,(ab^2+9)}{(x^2-b^2)^2}>0$ לכל x בתחום ההגדרה, לכן בהנחה ש- $b>0$:

הפונקציה עולה ($f'(x)>0$) כאשר $x<0$ וגם $x\neq -b$,

כלומר עבור: $-b<x<0$, $x<-b$.

הפונקציה יורדת ($f'(x)<0$) כאשר $x>0$ וגם $x\neq b$,

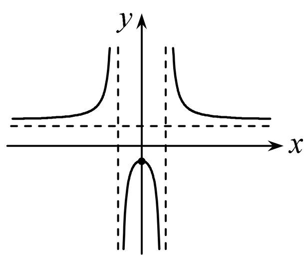
כלומר עבור: $x>b$, $0<x<b$.

(ג) $$f(0)<0\ \Rightarrow\ 3-\frac{9}{b^2}<0\ \Rightarrow\ \frac{3}{b^2}>1\ \Rightarrow\ b^2<3$$

בהנחה ש- $b>0$ נקבל:

$$\begin{cases}-\sqrt{3}<b<\sqrt{3}\\ b>0\end{cases}\ \Rightarrow\ 0<b<\sqrt{3}$$

(ד)



(7) (א)
$$-4 \le x < -2.5 \;\Rightarrow\; 2x+5<0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f(x) = -2x-5-x = -3x-5$$

(ב)
$$-2.5 < x \le 4 \;\Rightarrow\; 2x+5>0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f(x) = 2x+5-x = x+5$$

(ג) – (ה)
$$\lim_{x\to -2.5^-} f'(x) = \lim_{x\to -2.5^-} (-3x-5)' = -3$$
$$\lim_{x\to -2.5^+} f'(x) = \lim_{x\to -2.5^+} (x+5)' = 1$$

$f'(2.5^-) \ne f'(2.5^+)$, לכן עבור $x=-2.5$ נגזרת הפונקציה אינה מוגדרת.

בתחום $-4 \le x < -2.5$ נגזרת הפונקציה שלילית ולכן הפונקציה יורדת.

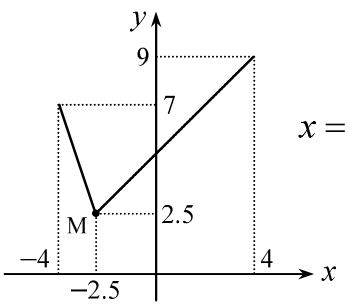
בתחום $-2.5 < x \le 4$ נגזרת הפונקציה חיובית ולכן הפונקציה עולה.

מכאן נקבל שנקודת המינימום המוחלט של הפונקציה היא :

$$x=-2.5 \;\Rightarrow\; f(-2.5) = 0-(-2.5) = 2.5$$

כלומר : $(-2.5, 2.5)$.

סקיצה של גרף הפונקציה :



(8)

$$\begin{array}{r|l} -4x^2+51x-36 & 4x-3 \\ \hline -4x^2+3x & -x+12 \\ 48x-36 & \\ 48x-36 & \\ 0 & \end{array}$$

ולכן :
$$f(x) = \frac{-4x^2+51x-36}{4x-3} = -x+12 \quad \left(x \ne \tfrac{3}{4}\right)$$
$$g(x) = 3x-4$$

שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x :

$$y=0 \;\Rightarrow\; x=\tfrac{4}{3} \;\Rightarrow\; \left(\tfrac{4}{3}, 0\right)$$

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x :

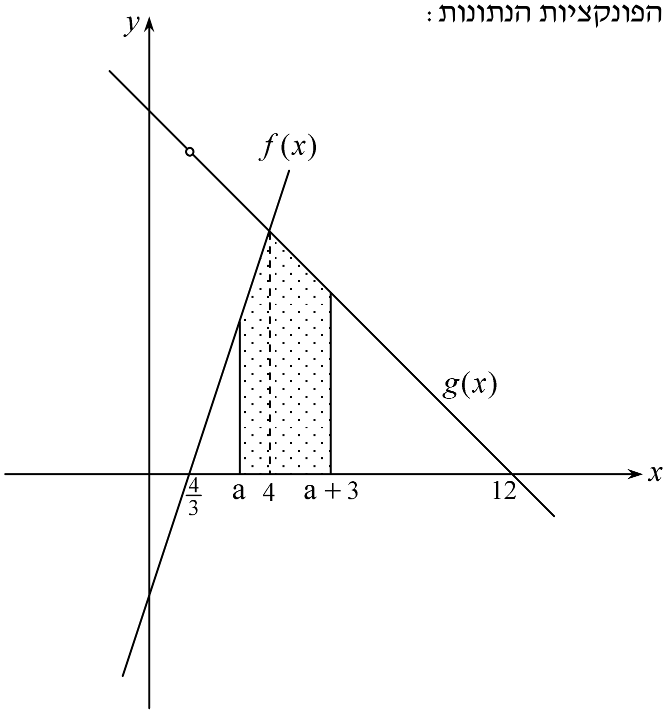
$$y=0 \;\Rightarrow\; -x+12=0 \;\Rightarrow\; x=12 \;\Rightarrow\; (12,0)$$

שיעורי נקודת החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות :

$$\begin{cases} y=12-x \\ y=3x-4 \end{cases} \;\Rightarrow\; 12-x=3x-4 \;\Rightarrow\; 4x=16 \;\Rightarrow\; x=4$$

$$x=4 \;\Rightarrow\; y=12-4=8 \;\Rightarrow\; (4,8)$$

נסרטט את הגרפים של הפונקציות הנתונות :



$$S=\frac{g(\mathrm{a})+g(4)}{2}\cdot(4-\mathrm{a})+\frac{f(4)+f(\mathrm{a}+3)}{2}\cdot(\mathrm{a}+3-4)=$$

$$=\frac{3\mathrm{a}-4+8}{2}\cdot(4-\mathrm{a})+\frac{8+(9-\mathrm{a})}{2}\cdot(\mathrm{a}-1)=$$

$$=\frac{(3\mathrm{a}+4)\,(4-\mathrm{a})}{2}+\frac{(17-\mathrm{a})\,(\mathrm{a}-1)}{2}=\frac{-4\mathrm{a}^2+26\mathrm{a}-1}{2}$$

$$\frac{-4\mathrm{a}^2+26\mathrm{a}-1}{2}=20.5 \;\Rightarrow\; 2\mathrm{a}^2-13\mathrm{a}+21=0$$

$$\mathrm{a}_{1,2}=\frac{13\pm1}{4} \;\Rightarrow\; \mathrm{a}_1=3.5\;,\;\mathrm{a}_2=3$$

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035806

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות