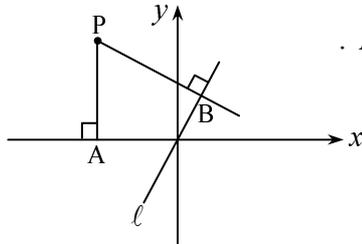


**פתרון מבחן מס' 20 (ספר מבחנים – שאלון 035807)**



(1) (א) נסמן:  $x_p = t$ ,  $y_p = p$ . מכאן:  $A(t, 0)$ .

נמצא את משוואת PB:

$$PB \perp \ell \Rightarrow m_{PB} \cdot m_\ell = -1$$

$$m_{PB} \cdot 3 = -1 \Rightarrow m_{PB} = -\frac{1}{3}$$

$$y - y_p = m_{PB}(x - x_p)$$

$$y - p = -\frac{1}{3}(x - t) \Rightarrow y = -\frac{x}{3} + p + \frac{t}{3}$$

$$3x = -\frac{x}{3} + p + \frac{t}{3}$$

שיעורי הנקודה B:

$$\frac{10x}{3} = p + \frac{t}{3} \Rightarrow x_B = \frac{3}{10}p + \frac{t}{10} = \frac{3p+t}{10}$$

$$y_B = 3 \cdot \frac{3p+t}{10} = \frac{9p+3t}{10}$$

$$AB = 9 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{3p+t}{10} - t\right)^2 + \left(\frac{9p+3t}{10} - 0\right)^2} = 9$$

$$\left(\frac{3p-9t}{10}\right)^2 + \left(\frac{9p+3t}{10}\right)^2 = 81$$

$$\frac{9p^2 - 54pt + 81t^2}{100} + \frac{81p^2 + 54pt + 9t^2}{100} = 81$$

$$90t^2 + 90p^2 = 8,100 \Rightarrow t^2 + p^2 = 90$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ x^2 + y^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 9x^2 = 90 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 9 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 90$ , אבל הנקודה P לא יכולה להימצא על הישר  $\ell$ ,

לכן המקום הגיאומטרי הוא מעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 = 90$ ,

מלבד הנקודות  $(\pm 3, \pm 9)$ .

(ב)  $M(x_M, y_M)$ . נסמן:  $|x_M| = |y_M| = k$ . מכאן:  $k^2 + k^2 = 90$

$$k^2 = 45 \Rightarrow k = \pm\sqrt{45} = \pm 3\sqrt{5}$$

$$M_1(3\sqrt{5}, 3\sqrt{5}), M_2(3\sqrt{5}, -3\sqrt{5}),$$

$$M_3(-3\sqrt{5}, 3\sqrt{5}), M_4(-3\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$$

(2) (א)  $\ell \in \pi$  : לפחות שני נקודות של  $\ell$  נמצאות ב-  $\pi$  .

$$(2, 0, -8) \in \pi \Rightarrow 2m + 0 - 8 + 2 = 0 \Rightarrow m = 3$$

נציב  $t = 1$  ונבדוק האם נקודה עם שיעורים  $(2 + 1 \cdot 6, 0 - 7, -8 + 10)$  גם היא נמצאת ב-  $\pi$  :

$$3 \cdot 8 + 4 \cdot (-7) + 2 + 2 \stackrel{?}{=} 0$$

$$24 - 28 + 4 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 0 \equiv 0$$

כלומר עבור  $m = 3$ , הישר  $\ell$  מוכל במישור  $\pi$  .

(ב) נסמן ב-  $M(a, b, 2)$  את נקודת החיתוך בין הישר למישור ( $m \neq 3$ ) .

לפי שיעור ה-  $z$  של הישר  $\ell$  :  $2 = -8 + t \cdot 10 \Rightarrow t = 1$

$$M : (2, 0, -8) + 1 \cdot (2m, -7, 10) = (2 + 2m, -7, 2)$$

גם נקודה זו נמצאת במישור  $\pi$ , לכן :

$$m(2 + 2m) + 4 \cdot (-7) + 2 + 2 = 0$$

$$2m^2 + 2m - 24 = 0 \Rightarrow m^2 + m - 12 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow m_1 = 3, m_2 = -4$$

הפתרון  $m_1 = 3$  נפסל, כי במקרה זה  $\ell$  מוכל ב-  $\pi$ , כלומר יש אינסוף נקודות משותפות ל-  $\ell$  ול-  $\pi$  .

$$m = -4 \Rightarrow M(2 - 8, -7, 2) \Rightarrow M(-6, -7, 2)$$

אזי, עבור  $m = -4$  לישר  $\ell$  ולמישור  $\pi$  יש נקודה משותפת אחת,

$(-6, -7, 2)$  ששיעור ה-  $z$  שלה שווה ל- 2 .

$$z(1-i) - z^2 - |\bar{z}|^2 + \bar{z} = 0 \quad (3) \quad (א)$$

נסמן:  $z = x + iy$ , ואז:  $\bar{z} = x - iy$ .

$$(x + iy)(1 - i) - (x + iy)^2 - (\sqrt{x^2 + y^2})^2 + x - iy = 0$$

$$x - xi + yi + y - x^2 - 2xyi + y^2 - x^2 - y^2 + x - iy = 0$$

$$2x - 2x^2 + y - 2xyi - xi = 0$$

$$\begin{cases} 2x - 2x^2 + y = 0 \\ -2xy - x = 0 \end{cases} \Rightarrow -x(2y + 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{או} \quad y = -\frac{1}{2}$$

$$2 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 + y = 0 \quad 2x - 2x^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$y = 0 \quad 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Downarrow \quad (2x - 1)^2 = 0$$

$$z = 0 \quad x = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$d = \frac{1}{8} - 2i, a_n \neq 0 \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad (ב)$$

$$A_1 = \text{Im} \Rightarrow A_1 = a_1 i$$

לפי נוסחת איבר כללי בסדרה חשבונית:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = a_1 i + \left(\frac{1}{8} - 2i\right)(n-1)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = a_1 i + \frac{n}{8} - \frac{1}{8} - 2in + 2i$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{n}{8} - \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} = -2n + 2 + a_1 \end{cases} \Rightarrow 4 = n - 1 \Rightarrow n = 5$$

$$-\frac{1}{2} = -2n + 2 + a_1 \Rightarrow -\frac{1}{2} = -2 \cdot 5 + 2 + a_1 \Rightarrow a_1 = 7.5$$

כלומר האיבר הראשון בסדרה החשבונית הוא  $A_1 = 7.5i$ .

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(1 - e^{-x}) \cdot (-e^{-x}) \cdot (-1) = 0 \quad (א) \quad (4)$$

$$2e^{-x}(1 - e^{-x}) = 0$$

$2e^{-x} > 0$  לכל ערך של  $x$ , לכן:

$$1 - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = (1 - e^0)^2 = 0$$

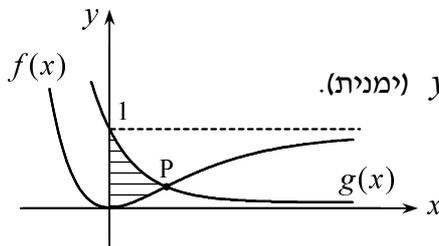
כלומר  $(0, 0)$  היא נקודה החשודה לקיצון.

| x     | x < 0 | x = 0 | x > 0 |
|-------|-------|-------|-------|
| f'(x) | -     | 0     | +     |
| f(x)  | ↘     | min   | ↗     |

$$f'(-1) = (+) \cdot (1 - e^1) < 0, \quad f'(1) = (+) \cdot (1 - e^{-1}) > 0$$

כלומר:  $(0, 0)$  היא נקודת המינימום של גרף הפונקציה.

(ב) נסרטט את הסקיצה של גרף הפונקציה, בעזרת העובדות הבאות:



תחומי עלייה וירידה: לפי הטבלה.

משוואת אסימפטוטה אופקית:  $y = 1$  (ימנית).

$$f(x) = (1 - e^{-x})^2 \geq 0$$

לכל ערך של  $x$ .

(ראו סרטוט משמאל).

$$g(x) = e^{-2x} > 0 \quad (ג) \quad \text{כמו כן: } g(0) = e^0 = 1$$

(i) שיעורי נקודת החיתוך של שני הגרפים:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow (1 - e^{-x})^2 = e^{-2x}$$

$$1 - 2e^{-x} + e^{-2x} = e^{-2x} \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$$

$$y = e^{-2 \ln 2} = (e^{\ln 2})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

כלומר, נקודת החיתוך בין הגרפים היא  $P(\ln 2, \frac{1}{4})$ .

המשך בעמוד הבא <<<

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{x_p} [g(x) - f(x)] dx = \int_0^{\ln 2} [e^{-2x} - (1 - e^{-x})^2] dx = \quad (ii) \\
 &= \int_0^{\ln 2} (2e^{-x} - 1) dx = (-2e^{-x} - x) \Big|_0^{\ln 2} = \\
 &= -2e^{-\ln 2} - \ln 2 - (-2 \cdot e^0 - 0) = -2 \cdot \frac{1}{2} - \ln 2 + 2 = \\
 &= (1 - \ln 2) \approx 0.3069 \text{ יחידות שטח}
 \end{aligned}$$

(5) נמצא את משוואת הישר. שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה

$$\begin{aligned}
 x = 0 &\Rightarrow f(0) = \frac{1}{3e} && \text{עם ציר ה-} y \text{ (נסמנה ב- A):} \\
 f'(x) &= \frac{2}{(3e - 2x)^2} && \text{שיפוע הישר:}
 \end{aligned}$$

$$m = f'\left(\frac{e}{2}\right) \Rightarrow \frac{2}{(3e - e)^2} = \frac{1}{2e^2}$$

$$y - \frac{1}{3e} = \frac{1}{2e^2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{x}{2e^2} + \frac{1}{3e} \quad \text{משוואת הישר:}$$

שיעור ה-  $x$  של נקודת החיתוך השנייה

$$\frac{1}{3e - 2x} = \frac{x}{2e^2} + \frac{1}{3e} \quad \text{בין גרף הפונקציה והישר (נסמנה ב- B):}$$

$$\frac{1}{3e - 2x} = \frac{3x + 2e}{6e^2} \Rightarrow (3x + 2e)(3e - 2x) = 6e^2$$

$$9ex - 6x^2 + 6e^2 - 4ex = 6e^2$$

$$6x^2 - 5xe = 0 \Rightarrow x(6x - 5e) = 0$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow \text{מתאים לנקודה A, } x_2 = \frac{5e}{6} \Rightarrow \text{מתאים לנקודה B}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{x_A}^{x_B} [y_{\text{גרף}} - f(x)] dx = \int_0^{\frac{5e}{6}} \left( \frac{x}{2e^2} + \frac{1}{3e} - \frac{1}{3e - 2x} \right) dx = \\
 &= \left( \frac{x^2}{4e^2} + \frac{x}{3e} + \frac{1}{2} \ln |3e - 2x| \right) \Big|_0^{\frac{5e}{6}} = \\
 &= \frac{1}{4e^2} \left( \frac{25e^2}{36} - 0 \right) + \frac{1}{3e} \left( \frac{5e}{6} - 0 \right) + \frac{1}{2} \left( \ln |3e - 2 \cdot \frac{5e}{6}| - \ln |3e| \right) = \\
 &= \frac{25}{144} + \frac{5}{18} + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3e} = \frac{65}{144} + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{9} = \frac{65}{144} + \ln \frac{2}{3} \approx 0.046 \text{ יחידת שטח}
 \end{aligned}$$

**גבי יקואל**

**מ ש ב צ ת**

**[www.mishbetzet.co.il](http://www.mishbetzet.co.il)**

**טלפון: 04-8200929**

**ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה**

**לכל הכיתות ✦ לכל השאלונים ✦ לכל הרמות**