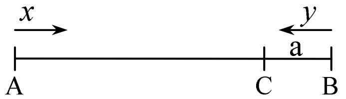
פתרון מבחן מס' 15 (ספר מבחנים – שאלון 035806)

(1) נסמן: x קמ"ש – מהירות מכונית א',



y קמ"ש – מהירות מכונית ב',

C – נקודת המפגש בין שתי המכוניות.

(א) a ק"מ $=\text{BC}$ הוא המרחק שעברה מכונית ב' עד הפגישה,

לכן $(\text{a}+240)$ ק"מ הוא המרחק AB, שעברה מכונית א' עד הפגישה,

$\frac{\text{a}}{y}$ שעות הוא זמן הנסיעה של מכונית ב' עד הפגישה,

$\frac{\text{a}+240}{x}$ שעות הוא זמן הנסיעה של מכונית א' עד הפגישה.

על סמך נתוני השאלה ניתן להרכיב את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} \frac{\text{a}}{x}=10 \;\Rightarrow\; x=\frac{\text{a}}{10} \\ \frac{\text{a}+240}{y}=9 \;\Rightarrow\; y=\frac{\text{a}+240}{9} \\ \frac{\text{a}+240}{x}=\frac{\text{a}}{y}+9 \;\Rightarrow\; \frac{(\text{a}+240)\cdot 10}{\text{a}}=\frac{\text{a}\cdot 9}{\text{a}+240}+9 \quad / \cdot \text{a}(\text{a}+240) \end{cases}$$

$$10\cdot(\text{a}+240)^2=9\text{a}^2+9\text{a}\cdot(\text{a}+240)$$

$$10\text{a}^2+4{,}800\text{a}+576{,}000=18\text{a}^2+2{,}160\text{a}$$

$$8\text{a}^2-2{,}640\text{a}-576{,}000=0 \;\Rightarrow\; \text{a}^2-330\text{a}-72{,}000=0$$

$$\text{a}_{1,2}=\frac{330\pm 630}{2} \;\Rightarrow\; \text{a}_1=480 \;,\; \text{a}_2=-150$$

הפתרון $\text{a}_2=-150$ נפסל, כי מרחק הוא גודל חיובי.

תשובה: מכונית ב' עברה עד הפגישה 480 ק"מ.

(ב) מהירות מכונית א': $x=\frac{\text{a}}{10}=\frac{480}{10}=48$ קמ"ש

מהירות מכונית ב': $y=\frac{\text{a}+240}{9}=\frac{480+240}{9}=80$ קמ"ש

(2) $1\ ,\ 5\ ,\ 9\ ,\ 13\ ,\ 17 \ \Rightarrow\ a_1=1\ ,\ d=a_2-a_1=5-1=4$

$\{1\}\ ,\ \{5\ ,\ 9\}\ ,\ \{13\ ,\ 17\ ,\ 21\}\ ,\ \ldots$

נגדיר סדרה חדשה b , שבה:

N הוא המספר הסידורי של הקבוצה (השורה),

b_N הוא מספר האיברים בקבוצה (השורה) ה-N - ית.

$b_1=1\ ,\ b_2=2\ ,\ b_3=3\ ,\ \ldots$

כלומר הסדרה b היא סדרה חשבונית שבה: $b_1=1\ ,\ D=1$.

(א) נמצא את המקום של האיבר הראשון בקבוצה (השורה) ה-N – ית.

לפני איבר זה נמצאים כל האיברים ב- $(N-1)$ קבוצות (שורות),

כלומר לפניו יש בסך הכול:

$1+2+3+\ldots+(N-1)=(1+N-1)\cdot\frac{N-1}{2}=$ איברים $\frac{N\cdot(N-1)}{2}$

כלומר המיקום של האיבר הראשון בקבוצה (השורה) ה-N – ית

בסדרה a_N הוא $\frac{N\cdot(N-1)}{2}+1$.

$$a_N=a_1+d\cdot\left[\frac{N\cdot(N-1)}{2}+1-1\right]=1+4\cdot\left[\frac{N\cdot(N-1)}{2}\right]=$$
$$=2N^2-2N+1$$

(ב) בקבוצה (השורה) ה-N – ית יש b_N איברים, ואת האיבר הראשון

מצאנו בסעיף (א) . מספר המחוברים:

$$b_N=b_1+D\cdot(N-1)=1+1\cdot(N-1)=N$$

סכום האיברים בקבוצה (השורה) ה-N – ית הוא:

$$S=\left[2a_1+d\cdot(N-1)\right]\cdot\frac{N}{2}=[2\cdot(2N^2-2N+1)+4\cdot(N-1)]\cdot\frac{N}{2}=$$
$$=(2N^2-2N+1+2N-2)\cdot N=2N^3-N$$

בדיקה: $N=3\ \Rightarrow\ S_3=13+17+21=51$

$S_3=2\cdot3^3-3=2\cdot27-3=54-3=51$

(3) (א) על-פי נתוני השאלה, ניתן להרכיב את הטבלה הבאה

(נעזרנו גם בנתונים שבסעיף (ד)) :

	תכנות	**יצירתיות**	**סך הכול**
גבר	15	5	20
אישה	9	7	16
סך הכול	24	12	36

$$P(\text{יצירתיות} - \text{II מענק}) =$$

$$= P(\text{יצירתיות} - \text{II מענק} \;,\; \text{יצירתיות} - \text{I מענק}) +$$

$$= P(\text{יצירתיות} - \text{II מענק} \;,\; \text{תכנות} - \text{I מענק}) =$$

$$= \frac{12}{36} \cdot \frac{11}{35} + \frac{24}{36} \cdot \frac{12}{35} = \frac{1}{3}$$

(ב) $P(\text{יצירתיות} - \text{II מענק} \;,\; \text{תכנות} - \text{I מענק}) = \frac{24}{36} \cdot \frac{12}{35} = \frac{8}{35}$

(ג) $P(\text{תכנות} - \text{I מענק} \;/\; \text{יצירתיות} - \text{II מענק}) =$

$$= \frac{P(\text{יצירתיות} - \text{II מענק} \cap \text{תכנות} - \text{I מענק})}{P(\text{יצירתיות} - \text{II מענק})} = \frac{\frac{8}{35}}{\frac{1}{3}} = \frac{24}{35}$$

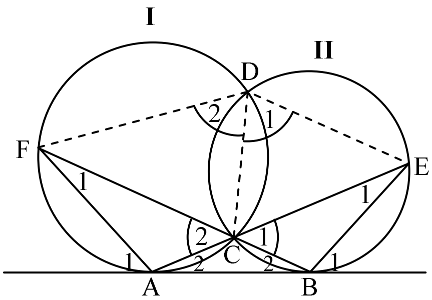
(ד) (i) $P(\text{תכנות} + \text{גבר} - \text{II מענק} \;,\; \text{תכנות} + \text{אישה} - \text{I מענק}) =$

$$= \frac{9}{36} \cdot \frac{15}{35} = \frac{3}{28}$$

(ii) $P(\text{גבר} - \text{II מענק} \;,\; \text{אישה} - \text{I מענק} \;/\; \text{תכנות} - \text{II מענק} \;,\; \text{תכנות} - \text{I מענק}) =$

$$= \frac{P(\text{תכנות} + \text{גבר} - \text{II מענק} \;,\; \text{תכנות} + \text{אישה} - \text{I מענק})}{P(\text{תכנות} - \text{II מענק} \;,\; \text{תכנות} - \text{I מענק})} =$$

$$= \frac{\frac{3}{28}}{\frac{24}{36} \cdot \frac{23}{35}} = \frac{\frac{3}{28}}{\frac{46}{105}} = \frac{45}{184}$$



(4) (א) צ"ל: $\Delta FAB \sim \Delta ABE$.

$\measuredangle A_2 = \measuredangle F_1$, $\measuredangle B_2 = \measuredangle E_1$

(זווית בין משיק למיתר
שווה לזווית ההיקפית הנשענת
על המיתר מצדו השני)

מכאן, $\Delta FAB \sim \Delta ABE$

לפי משפט דמיון ז.ז. .

(ב) (*i*) צ"ל: $\measuredangle D_1 = \measuredangle C_1 + \measuredangle E_1$

$\measuredangle D_1 = 180° - \measuredangle CBE \quad (*)$ (סכום זוויות נגדיות במרובע החסום במעגל שווה ל- $180°$)

$\measuredangle B_1 = \measuredangle C_1$ (זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני)

$\measuredangle B_2 = \measuredangle E_1$ (הוכחנו בסעיף (א))

$\measuredangle CBE = 180° - \measuredangle B_1 - \measuredangle B_2$ (סכום זוויות המרכיבות זווית שטוחה שווה ל- $180°$)

$\measuredangle CBE = 180° - \measuredangle C_1 - \measuredangle E_1$ (הצבה)

נציב ביטוי זה ב- $(*)$ ונקבל:

$$\measuredangle D_1 = 180° - (180° - \measuredangle C_1 - \measuredangle E_1) \quad \Rightarrow \quad \measuredangle D_1 = \measuredangle C_1 + \measuredangle E_1$$

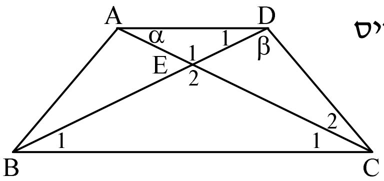
מ.ש.ל.

בדרך דומה ניתן להוכיח כי $\measuredangle D_2 = \measuredangle C_2 + \measuredangle F_1$.

(*ii*)

$$\begin{aligned}
\measuredangle D_1 + \measuredangle D_2 &= \measuredangle C_1 + \measuredangle E_1 + \measuredangle C_2 + \measuredangle F_1 = \\
&= (180° - \measuredangle ACB) + \measuredangle B_2 + \\
&\quad + (180° - \measuredangle ACB) + \measuredangle A_2 = \\
&= 180° - 120° + \measuredangle B_2 + 180° - 120° + \measuredangle A_2 = \\
&= 120° + (\measuredangle A_2 + \measuredangle B_2) = 120° + (180° - \measuredangle ACB) = \\
&= 120° + 180° - 120° = 180°
\end{aligned}$$

כלומר הנקודות E , D , F נמצאות על קו ישר אחד.



(5) (א) הטרפז הוא שווה-שוקיים, לכן זוויות הבסיס שוות זו לזו, האלכסונים שווים זה לזה, האלכסונים יוצרים עם כל בסיס זוויות השוות זו לזו:

$\measuredangle D_1 = \measuredangle B_1 = \measuredangle C_1 = \measuredangle CAD = \alpha$.

$\measuredangle C = 180° - \measuredangle D \;\Rightarrow\; \measuredangle C = 180° - (\alpha+\beta) \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \measuredangle C_2 = 180° - (2\alpha+\beta)$

$\measuredangle D_1 = \measuredangle B_1$, $\measuredangle A_1 = \measuredangle C_1$, לכן $\Delta ADE \sim \Delta CBE$

לפי משפט דמיון ז.ז. .

מכאן נקבל: $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta CBE}} = \left(\frac{AD}{BC}\right)^2$ (שטחים של משולשים דומים מתייחסים

זה לזה כריבוע היחס בין צלעות מתאימות).

נסמן: $AD = a$. לפי משפט הסינוסים ב- ΔADC :

$$\frac{AD}{\sin\measuredangle C_2} = \frac{DC}{\sin\measuredangle CAD} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; DC = \frac{AD\cdot\sin\measuredangle CAD}{\sin\measuredangle C_2} = \frac{a\sin\alpha}{\sin[180° - (2\alpha+\beta)]} = \frac{a\sin\alpha}{\sin(2\alpha+\beta)}$$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔBCD :

$$\frac{DC}{\sin\measuredangle B_1} = \frac{BC}{\sin\measuredangle BDC} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; BC = \frac{DC\cdot\sin\measuredangle BDC}{\sin\measuredangle B_1} = \frac{a\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha} = \frac{a\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}$$

$$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta CBE}} = \left[\frac{a\sin(2\alpha+\beta)}{a\sin\beta}\right]^2 = \frac{\sin^2(2\alpha+\beta)}{\sin^2\beta}$$ מ.ש.ל.

(ב)

$$\sqrt{\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta BEC}}} = \frac{1}{2}\ ,\ \alpha = 15° \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{\sin^2(30°+\beta)}{\sin^2\beta}} = \frac{1}{2}$$

$\sin(30°+\beta) > 0$, $\sin\beta$, לכן:

$$\frac{\sin(30°+\beta)}{\sin\beta} = \frac{1}{2}$$

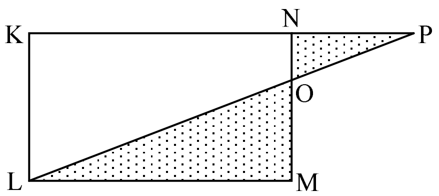
$$2\sin(30°+\beta) = \sin\beta \;\Rightarrow\; 2\cdot(\sin 30°\cos\beta + \sin\beta\cos 30°) = \sin\beta$$

$$2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cos\beta + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\right) = \sin\beta \;\Rightarrow\; \cos\beta + \sqrt{3}\sin\beta = \sin\beta$$

$$\cos\beta = (1-\sqrt{3})\cdot\sin\beta$$

$\cos\beta = 0$ אינו פתרון של המשוואה, לכן:

$$\tan\beta = \frac{1}{1-\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \beta = -53.79° + 180°n \;\Rightarrow\; \beta \approx 126.21°$$



(6) פונקציית המטרה:

$$S = S_{\Delta PON} + S_{\Delta MOL} =$$
$$= \frac{ON \cdot NP}{2} + \frac{OM \cdot ML}{2}$$

נסמן: $NM = a$, $LM = b$, $NO = x$,

ואז: $OM = a - x$.

נבטא את NP בעזרת a , b ו- x :

$\Delta PNO \sim \Delta LMO$ (הרכבה של משפט תאלס)

לכן: $\frac{PN}{LM} = \frac{NO}{MO} \Rightarrow \frac{PN}{b} = \frac{x}{a-x} \Rightarrow PN = \frac{bx}{a-x}$

מכאן, פונקציית המטרה: $S(x) = \frac{x \cdot \frac{bx}{a-x}}{2} + \frac{b \cdot (a-x)}{2} =$

$$= \frac{bx^2}{2 \cdot (a-x)} + \frac{b \cdot (a-x)}{2} = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{a-x} + a - x \right)$$

$$S'(x) = \frac{b}{2} \cdot \left[\frac{2x \cdot (a-x) + x^2}{(a-x)^2} - 1 \right]$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{b}{2} \cdot \left[\frac{2x \cdot (a-x) + x^2}{(a-x)^2} - 1 \right] = 0$$

$$2ax - x^2 = (a-x)^2 \Rightarrow 2ax - x^2 = a^2 + x^2 - 2ax$$

$$2x^2 - 4ax + a^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 8a^2}}{4} = \frac{2a \pm a\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{a}{2} \cdot (2 + \sqrt{2}) \ , \ x_2 = \frac{a}{2} \cdot (2 - \sqrt{2})$$

$0 \le x \le a$, $x_1 > a$, לכן הפתרון נפסל, לפי המשמעות של השאלה.

x	$0 < x < \frac{a}{2} \cdot (2-\sqrt{2})$	$x = \frac{a}{2} \cdot (2-\sqrt{2})$	$\frac{a}{2} \cdot (2-\sqrt{2}) < x < a$
S'	$-$	0	$+$
S	↘	min	↗

$$S'(0) = \frac{b}{2} \cdot (0-1) < 0 \ , \ S'(0.9a) = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{1.8a \cdot 0.1a + 0.81a^2}{0.01a^2} \right) = \frac{b}{2} \cdot (99-1) > 0$$

עבור $x = \frac{a}{2} \cdot (2 - \sqrt{2})$ סכום השטחים הוא מינימלי. במקרה זה:

$$\frac{ON}{OM} = \frac{x}{a-x} = \frac{\frac{a}{2} \cdot (2-\sqrt{2})}{a - \frac{a}{2} \cdot (2-\sqrt{2})} = \frac{2-\sqrt{2}}{2-2+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$ מ.ש.ל.

(7) (א) $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2x-1=\cos 2x-1=1-2\sin^2 x-1=-2\sin^2 x$

(ב) (i) לכל x $\quad \sin^2 x\ge 0 \;\Rightarrow\; -2\sin^2 x\le 0 \;\Rightarrow\; f'(x)\le 0$

לכן, הפונקציה יורדת בכל תחום, לכן אין לה נקודות קיצון.

(ii) $\quad f'(x)=0 \;\Rightarrow\; -2\sin^2 x=0 \;\Rightarrow\; \sin x=0$

$x=\pi \mathrm{n}\;,\; \mathrm{n}\in\mathbb{Z}$

בנקודות אלו הנגזרת שווה ל- 0 והנגזרת לא מחליפה את סימנה,

לכן בנקודות אלה לפונקציה יש נקודות פיתול.

$$y=\frac{1}{2}\sin 2\pi\mathrm{n}-\pi\mathrm{n}=-\pi\mathrm{n} \;\Rightarrow\; (\pi\mathrm{n},-\pi\mathrm{n})\;,\; \mathrm{n}\in\mathbb{Z}$$

(**הערה:** יש נקודות פיתול נוספות, כאשר $y''(x)=0$,

אך לא מבקשים למצוא אותן).

(ג) $\quad x+\sin^2 x\ge x \quad (\sin^2 x\ge 0)$

לכן: $g(x)\ge y$ בכל תחום, כלומר גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא

מעל גרף הפונקציה y לכל ערך של x (חוץ ממספר סופי של נקודות,

שהן נקודות ההשקה).

$$S=\int_0^{2\pi}[g(x)-y]\,dx=\int_0^{2\pi}(x+\sin^2 x-x)\,dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx=\left[-\frac{1}{2}f(x)\right]\Big|_0^{2\pi}=\left[-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2x-x\right)\right]\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\sin 4\pi-2\pi-\left(\frac{1}{2}\sin 0-0\right)\right]=$$

$=-\frac{1}{2}\cdot(0-2\pi-0)=$ π יחידות שטח

(8) (א) תחום הגדרה: $(x+\mathrm{a})^4 \neq 0 \;\Rightarrow\; x+\mathrm{a} \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq -\mathrm{a}$

(ב) $$\lim_{x\to -\mathrm{a}} \frac{(x+2\mathrm{a})^2}{(x+\mathrm{a})^4} = \frac{\mathrm{a}^2}{0^+} = +\infty \;\Rightarrow\; x=-\mathrm{a}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{(x+2\mathrm{a})^2}{(x+\mathrm{a})^4} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}+\frac{2\mathrm{a}}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{\mathrm{a}}{x}\right)^4} = \frac{0}{1} = 0 \;\Rightarrow\; y=0$$

משוואות האסימפטוטות: $x=-\mathrm{a}$, $y=0$.

(ג) שיעורי נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$$x=0 \;\Rightarrow\; f(0)=\frac{(2\mathrm{a})^2}{\mathrm{a}^4}=\frac{4\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}^4}=\frac{4}{\mathrm{a}^2} \;\Rightarrow\; \left(0,\frac{4}{\mathrm{a}^2}\right)$$

שיעורי נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$f(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{(x+2\mathrm{a})^2}{(x+\mathrm{a})^4}=0 \;\Rightarrow\; (x+2\mathrm{a})^2=0$$

$$x=-2\mathrm{a} \;\Rightarrow\; (-2\mathrm{a},0)$$

(ד) $$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{2\,(x+2\mathrm{a})\,(x+\mathrm{a})^4-4\,(x+\mathrm{a})^3(x+2\mathrm{a})^2}{(x+\mathrm{a})^8}=0$$

$$2(x+2\mathrm{a})[x+\mathrm{a}-2(x+2\mathrm{a})]=0 \;\Rightarrow\; 2(x+2\mathrm{a})(-x-3\mathrm{a})=0$$

$$x+2\mathrm{a}=0 \;\Rightarrow\; x=-2\mathrm{a}$$

$$-x-3\mathrm{a}=0 \;\Rightarrow\; x=-3\mathrm{a}$$

(ה)

x	$x<-3a$	$x=-3a$	$-3a<x<-2a$	$x=-2a$
$f'(x)$	+	0	−	0
$f(x)$	↗	max	↘	min

x	$-2a<x<-a$	$x=-a$	$x>-a$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	max	↘

המשך בעמוד הבא >>>

$$f'(-4a) = \frac{2\,(-)\,(+)}{(-)} > 0 \;,\; f'(-2.5a) = \frac{2\,(-)\,(-)}{(-)} < 0$$

$$f'(-1.5a) = \frac{2\,(+)\,(-)}{(-)} > 0 \;,\; f'(0) = \frac{2\,(+)\,(-)}{(+)} < 0$$

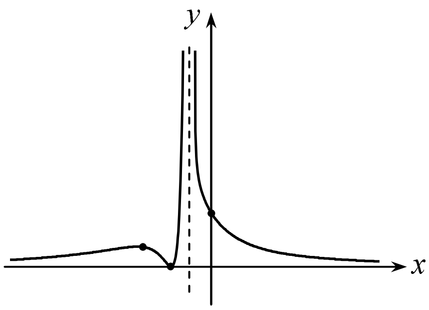
תשובה: הפונקציה עולה עבור: $-2a < x < -a \;\;,\;\; x < -3a$

הפונקציה יורדת עבור: $x > -a \;\;,\;\; -3a < x < -2a$.

(ו)

$$f(-2a) = 0$$

$$f(-3a) = \frac{a^2}{16a^4} = \frac{1}{16a^2}$$



גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929