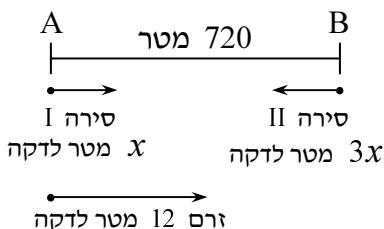


## פתרונות מבחן מס' 26 (ספר מבחנים – שאלון 035804)



(1) נסמן ב-  $x$  מטר לדקה את מהירות הסירה  
שיצאה מנוקודה A (לא זרם הנהר),  
ואז  $3x$  מטר לדקה יסמן את מהירות  
הסירה שיצאה מנוקודה B (לא זרם הנהר).  
תחום הגדרה:  $3x > 12 \Rightarrow x > 4$

$$\text{כל סירה עברה עד הפגישה: } 360 \text{ מטר} = \frac{720}{2},$$

לכן הזמן מהיציאה ועד הפגישה של הסירה שיצאה מ- A :  
 $\frac{360}{x+12}$  דקות,  
והזמן מהיציאה ועד הפגישה של הסירה שיצאה מ- B :  
 $\frac{360}{3x-12}$  דקות

הסירה שיצאה מ- B הייתה בדרך (עד הפגישה) 4 דקות פחות, לכן:

$$\frac{360}{x+12} = \frac{120}{x-4} + 4 \quad / \cdot (x+12)(x-4)$$

$$360(x-4) = 120(x+12) + 4(x+12)(x-4)$$

$$360x - 1,440 = 120x + 1,440 + 4(x^2 - 4x + 12x - 48)$$

$$0 = 4x^2 - 208x + 2,688 \quad / :4 \Rightarrow x^2 - 52x + 672 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{52 \pm \sqrt{52^2 - 4 \cdot 672}}{2} = \frac{52 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 28, x_2 = 24$$

**תשובה:** מהירות הסירה שיצאה מנוקודה A (לא זרם הנהר)

היא 24 מטר לדקה או 28 מטר לדקה.

$$y=0 \Rightarrow (x+3)^2 + 4^2 = 20 \Rightarrow (x+3)^2 = 4 \quad (\text{N}) \quad (2)$$

$$x+3=2 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow B(-1,0)$$

$$x+3=-2 \Rightarrow x=-5 \Rightarrow A(-5,0)$$

המשך בעמוד הבא ▶◀◀

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y+4)^2 = 20 \\ y = -2x - 20 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$(x+3)^2 + (-2x-20+4)^2 = 20$$

$$x^2 + 6x + 9 + (2x+16)^2 = 20$$

$$x^2 + 6x + 9 + 4x^2 + 64x + 256 - 20 = 0$$

$$5x^2 + 70x + 245 = 0 \quad / :5 \Rightarrow x^2 + 14x + 49 = 0$$

$$(x+7)^2 = 0 \Rightarrow x = -7 \Rightarrow y = -2 \cdot (-7) - 20 = -6$$

כלומר: C(-7, -6)

(א) משווה את המעגל נסיק כי מרכזו המעגל הוא M(-3, -4)

נקודות אמצע המיתר BC:

$$\left( \frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) = \left( \frac{-1 - 7}{2}, \frac{0 - 6}{2} \right) = (-4, -3)$$

מכיוון שנקודות אמצע המיתר BC אינה מתלכדת עם מרכזו המעגל M,

הרי ש- BC אינו קוטר במעגל.

y = -2x - 20 (ד) משווה המשיק הנתונה:

y\_D = 0 \Rightarrow 0 = -2x - 20 \Rightarrow x\_D = -10 בנקודה D:

D(-10, 0) לכן:

$\Delta MCD$  הוא משולש ישר-זווית ( $C = 90^\circ$ ) מכיוון שהרדיוס לנקודת ההשקה מאונך למשיק.

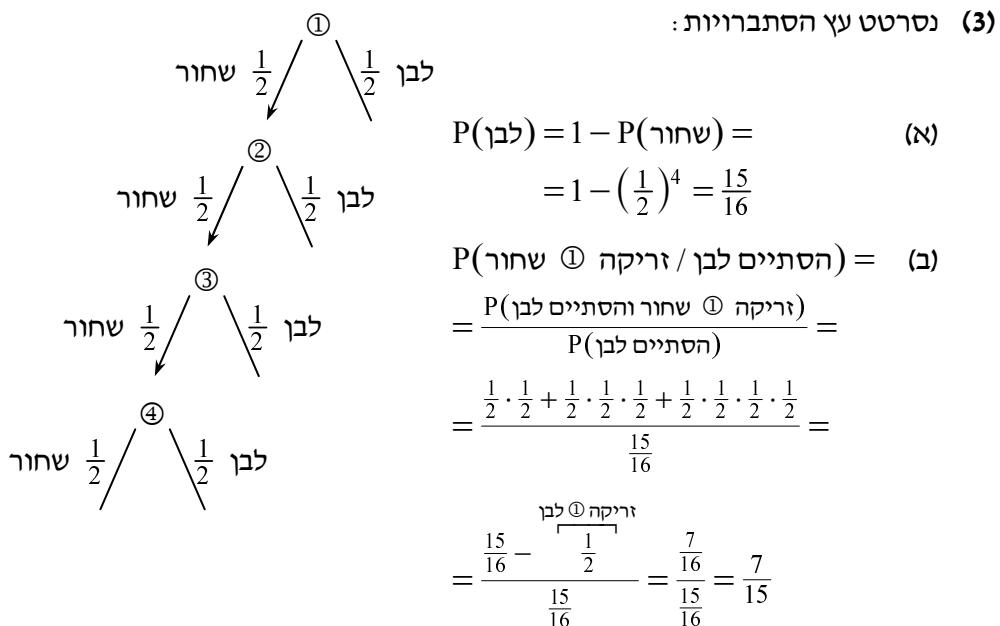
מרכז המעגל החוסם משולש ישר-זווית נמצא באמצע היתר,

לכן שיעורי מרכזו המעגל:

$$O\left(\frac{x_D + x_M}{2}, \frac{y_D + y_M}{2}\right) = O\left(\frac{-10 - 3}{2}, \frac{0 - 4}{2}\right) = O(-6.5, -2)$$

$$\begin{aligned} R^2 &= MO^2 = (x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2 = \\ &= (-3 + 6.5)^2 + (-4 + 2)^2 = 12.25 + 4 = 16.25R \end{aligned}$$

כלומר משווה את המעגל:



$$\begin{cases} P_{\text{לבן}} + P_{\text{שחור}} = 1 \\ P_{\text{שחור}} = 2 \cdot P_{\text{לבן}} \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot P_{\text{שחור}} + P_{\text{שחור}} = 1 \quad (\alpha)$$

$$P_{\text{שחור}} = \frac{1}{3}, \quad P_{\text{לבן}} = \frac{2}{3} \quad \text{כלומר :}$$

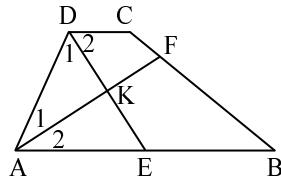
כעת ההסתירות (בכל זריקה) לקבל לבן היא  $\frac{2}{3}$

והסתירות לקבל שחור היא  $\frac{1}{3}$ , ולכן :

$$P(\text{שחור}) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{80}{81}$$

$$P(\text{זריקה } ① \text{ שחור והסתויים לבן / זריקה } ① \text{ שחור}) = \frac{P(\text{זריקה } ① \text{ שחור והסתויים לבן})}{P(\text{הסתויים לבן})} = \quad (\beta)$$

$$= \frac{\frac{80}{81} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{80}{81}}}{\frac{80}{81}} = \frac{26}{81} \cdot \frac{80}{81} = \frac{26}{80} = \frac{13}{40}$$



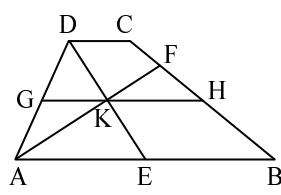
.  $AB \parallel DC$ ,  $\angle A_1 = \angle A_2$ ,  $\angle D_1 = \angle D_2$  (4)  
 נתון :  
 (א) ציל :  $\angle DKA = 90^\circ$   
 נסמן :  $\angle A_1 = \angle A_2 = \alpha$  (חיבור זוויות)  
 $\angle DAE = 2\alpha$

(סכום זוויות חד-צדדיות בין ישרים  
 מקבילים שווה ל-  $180^\circ$ )

$\Downarrow$

$$\angle D_1 = \angle D_2 = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$$

$\Downarrow$



(סכום זוויות ב-  $\triangle DKA$  הוא  $180^\circ$ )  
 $\angle DKA = 180^\circ - \angle A_1 - \angle D_1 =$   
 $= 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$

(ב) נתון :

ציל : GH הוא קטע אמצעים בטרפז ABCD  
 (זוויות מתחלפות)  $\angle GKA = \angle KAE = \alpha$

שווות בין ישרים מקבילים)

$\Downarrow$

$$\angle GKA = \angle GAK = \alpha$$

$\Downarrow$

(ב-  $\triangle AGK$  מול זוויות שווות

מנוחות צלעות שווות)

(זוויות מתחלפות שווות בין ישרים מקבילים)  $\angle CDK = \angle DKG = 90^\circ - \alpha$

$\Downarrow$

$$\angle KDG = \angle DKG = 90^\circ - \alpha$$

$\Downarrow$

(ב-  $\triangle DKG$  מול זוויות שווות

מנוחות צלעות שווות)

$\Downarrow$

המשך בעמוד הבא ►►

$$GD = AG$$

$$\Downarrow$$

קטע אמצעים בטרפז  $ABCD$  (קטע היוצא מאמצע שוק אחד ומקביל לבסיסים הוא קטע אמצעים).

(א) נתון: ס"מ  $3$  ס"מ  $4$ , DC = 1 ס"מ, AD = 3 ס"מ  
צריך למצוא את אורך הקטע GH.

$$AG = GD = GK = \frac{AD}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$\Downarrow$

$\Delta ADE$  - GK (קטע אמצעים GK ב-  $\Delta ADE$   
שווה למחצית AE)

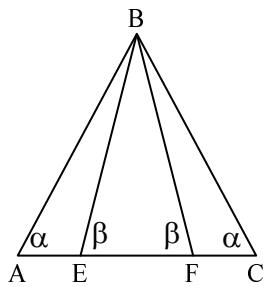
$\Downarrow$

$$AE = 2 \cdot GK = 2 \cdot 1.5 = 3$$

$\Downarrow$

$$GH = \frac{AB + DC}{2} = \frac{AE + BE + DC}{2} = \frac{3 + 4 + 1}{2} = 4$$

(הצבה, חיבור קטעים)



(א) דרך I : (5)

$\Delta ABC$  ו-  $\Delta BEF$  הם משולשים שווי-שוקיים

(מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות)

. AB = BC = x

$$(סכום זוויות במשולש ABC הוא 180^\circ) \rightarrow ABC = 180^\circ - 2\alpha$$

$$(סכום זוויות במשולש EFB הוא 180^\circ) \rightarrow EBF = 180^\circ - 2\beta$$

$$\frac{AC}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{x}{\sin \alpha} \quad \therefore \Delta ABC$$

המשך בעמוד הבא <<>

$$AC = \frac{x \sin(180^\circ - 2\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{x \sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{x \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2x \cos \alpha$$

$$p_1 = AB + BC + AC = 2x + 2x \cos \alpha = 2x(1 + \cos \alpha) \quad \text{ואז :}$$

$$\frac{x}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{BF}{\sin \alpha} \quad \text{: } \Delta BFC \text{ משפט הסינוסים ב-}$$

$$BF = \frac{x \sin \alpha}{\sin \beta} \quad \text{: לכן}$$

$$\frac{EF}{\sin(180^\circ - 2\beta)} = \frac{BF}{\sin \beta} \quad \text{: } \Delta BEF \text{ משפט הסינוסים ב-}$$

$$EF = \frac{x \sin \alpha \cdot \sin 2\beta}{\sin^2 \beta} = \frac{2x \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \beta}$$

$$p_2 = BE + BF + EF = \frac{2x \sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{2x \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \beta} = \\ = \frac{2x \sin \alpha}{\sin \beta}(1 + \cos \beta)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2x(1 + \cos \alpha)}{\frac{2x \sin \alpha(1 + \cos \beta)}{\sin \beta}} = \frac{\sin \beta(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha(1 + \cos \beta)}$$

**דרך II**

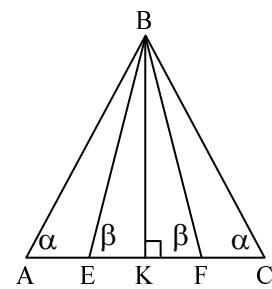
נעביר ,  $BK \perp AC$  ואז :

$$EF = FK , AK = KC$$

(במשולש שווה-שוקיים , גובה לבסיס

הוא גם תיכון לבסיס).

. נסמן :  $BK = h$



$$AB = \frac{h}{\sin \alpha} , AK = \frac{h}{\tan \alpha} = \frac{h \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{: } \Delta ABC \text{ ב-}$$

$$EB = \frac{h}{\sin \beta} , EK = \frac{h}{\tan \beta} = \frac{h \cos \beta}{\sin \beta} \quad \text{: } \Delta EBK \text{ ב-}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2AB + 2AK}{2EB + 2EK} = \frac{AB + AK}{EB + EK} = \frac{\frac{h}{\sin \alpha} + \frac{h \cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{h}{\sin \beta} + \frac{h \cos \beta}{\sin \beta}} = \frac{\sin \beta(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha(1 + \cos \beta)}$$

**המשך בעמוד הבא**

(ב) נתון:  $p_1 = 2.2p_2$ ,  $\beta = 2\alpha$

$$\frac{p_1}{p_2} = 2.2 = \frac{\sin 2\alpha (1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha (1 + \cos 2\alpha)}$$

$$2.2 \sin \alpha (1 + 2 \cos^2 \alpha - 1) = 2 \sin \alpha \cos \alpha (1 + \cos \alpha) / : \sin \alpha \neq 0$$

$$4.4 \cos^2 \alpha = 2 \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha / : \cos \alpha \neq 0$$

$$2.4 \cos \alpha = 2 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{2.4} \Rightarrow \alpha = 33.557^\circ$$

(הפתרון  $\alpha = -33.557^\circ$  מבוטל).

$$y' = 2x(a^2 + a) - 12x^2 \quad (i)$$

$$m_{\text{משיק}} = y'(1) = 2(a^2 + a) - 12 = 2a^2 + 2a - 12$$

$$m_{\text{משיק}} = y'(-1) = -2(a^2 + a) - 12 = -2a^2 - 2a - 12 \quad (ii)$$

(ב) המשיקים נחתכים אם הם מקבילים או מתלכדים,  
כלומר אם שיפועיהם אינם שווים.

$$2a^2 + 2a - 12 \neq -2a^2 - 2a - 12$$

$$4a^2 + 4a \neq 0 \Rightarrow 4a(a+1) \neq 0 \Rightarrow a \neq 0, -1$$

(ג) נבדוק האם עבור  $a = 0$  המשיקים מתלכדים.

$$a = 0 \Rightarrow y = -4x^3 \Rightarrow y' = -12x^2$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow (1, -4)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -4 \cdot (-1)^3 = 4 \Rightarrow (-1, 4)$$

שיעור המשיקים:

משוואת משיק ראשון:

משוואת משיק שני:

כלומר המשיקים אינם מתלכדים.

**המשך בעמוד הבא**

נבדוק האם עבור  $a = -1$  המשיקים מתלכדים.

$$a = -1 \Rightarrow y = -4x^3 \Rightarrow y' = -12x^2$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow (1, -4)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (-1, 4)$$

$$y'(1) = y'(-1) = -12$$

שיוף המשיקים :

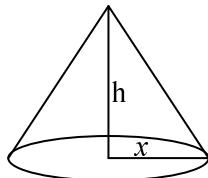
משוואת משיק ראשוני ומשוואת משיק שני, כפי שמצאנו קודם :

$$y = -12x + 8, \quad y = -12x - 8$$

כלומר המשיקים אינם מתלכדים.

**תשובה:** עבור  $a = 0$  או  $a = -1$  המשיקים מקבילים

(ואינם מתלכדים).



(7) נסמן ב-  $x$  מטר את אורך הרדיוס של בסיס החגורות  
וב-  $h$  מטר את גובה החגורות.

נתון כי נפח החגורות הוא  $72\pi$  מ"ק, לכן :

$$\frac{\pi x^2 h}{3} = 72\pi \Rightarrow h = \frac{216\pi}{\pi x^2} = \frac{216}{x^2}$$

$$f(x) = 2x + h = 2x + \frac{216}{x^2}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{216}{(x^2)^2} \cdot 2x = 2 - \frac{432}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{432}{x^3} = 0 / \cdot x^3$$

$$2x^3 = 432 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = \sqrt[3]{216} = 6$$

$$f''(x) = (2 - 432x^{-3})' = -432 \cdot (-3) \cdot x^{-3-1} = \frac{1,296}{x^4}$$

$$f''(6) > 0 \Rightarrow \min$$

**תשובה:** אורך הרדיוס צריך להיות 6 מטרים.

(8) לפונקציה  $y = g(x)$  יש נקודות קיצון כאשר  $x = -1$  ו-  $x = 2$ , לכן :

$$g'(-1) = f(-1) = 0$$

$$g'(2) = f(2) = 0$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-6x + a) dx = -3x^2 + ax + C_1$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow 0 = -3 \cdot (-1)^2 + a \cdot (-1) + C_1$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 0 = -3 \cdot 2^2 + a \cdot 2 + C_1$$

קיבלנו מערכת משוואות :

$$\begin{cases} 0 = -3 - a + C_1 \\ 0 = -12 + 2a + C_1 \end{cases}$$

$$0 = 9 - 3a \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 0 = -3 - 3 + C_1 \Rightarrow C_1 = 6$$

$$g'(x) = f(x) = -3x^2 + 3x + 6$$

כלומר :

$$g''(x) = f'(x) = -6x + a = -6x + 3$$

$$g''(-1) = 6 + 3 > 0 \Rightarrow \text{min}$$

$$g''(2) = -12 + 3 < 0 \Rightarrow \text{max}(2, 0)$$

שיעור ה-  $y$  של המקסימום הוא 0 כי נתון ש-  $y = g(x)$  משיקה לציר ה-  $x$

בנקודת המינימום.

$$g(x) = \int g'(x) dx = \int (-3x^2 + 3x + 6) dx = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x + C_2$$

$$g(2) = 0 \Rightarrow 0 = -8 + \frac{3}{2} \cdot 4 + 12 + C_2 \Rightarrow C_2 = -10$$

$$g(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 10$$



טלפון: 04-8200929

**ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה**

❖ לכל ה大雨ות ❖ לכל השאלונים ❖ לכל הרמות