פתרון מבחן מס' 12 (ספר מבחנים – שאלון 035806)

(1) נסמן: פועל מהיר יכול לסיים את כל העבודה ב- x שעות,
ופועל איטי יכול לסיים את כל העבודה ב- y שעות.
שני הפועלים יחד צריכים להכין N חלקים.
אז: בשעה אחת, הפועל המהיר עושה $\frac{1}{x}$ של כל העבודה ($\frac{N}{x}$ חלקים),
והפועל האיטי עושה $\frac{1}{y}$ של כל העבודה ($\frac{N}{y}$ חלקים).
כאשר שני הפועלים עובדים יחד, הם עושים בשעה אחת $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$
של כל העבודה, ויכולים לסיים את כולה ב- $1:\frac{x+y}{xy}=\frac{xy}{x+y}$ שעות.

הפועל המהיר עשה בסך הכול: $\frac{Ny}{x+y}$ חלקים $=\frac{N}{x}\cdot\frac{xy}{x+y}$

הפועל האיטי עשה בסך הכול: $\frac{Nx}{x+y}$ חלקים $=\frac{N}{y}\cdot\frac{xy}{x+y}$

מספר החלקים שהכין הפועל המהיר גדול ב- 40 ממספר החלקים שהכין
הפועל האיטי, לכן: $\frac{Ny}{x+y}=\frac{Nx}{x+y}+40 \quad (*)$

אם הפועל המהיר היה מכין $\frac{Nx}{x+y}$ חלקים, היה לוקח לו $\frac{x^2}{x+y}$ שעות $=\frac{\frac{Nx}{x+y}}{\frac{N}{x}}$.

אם הפועל האיטי היה מכין $\frac{Ny}{x+y}$ חלקים, היה לוקח לו $\frac{y^2}{x+y}$ שעות $=\frac{\frac{Ny}{x+y}}{\frac{N}{y}}$.

לכן: $\frac{\frac{x^2}{x+y}}{\frac{y^2}{x+y}}=\frac{9}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2}=\frac{9}{16} \Rightarrow \frac{x}{y}=\pm\frac{3}{4}>0 \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{3}{4}$

תשובה לסעיף (ב): הזמן שבו הפועל האיטי יסיים את כל העבודה גדול פי $\frac{4}{3}$
מהזמן שבו הפועל המהיר יסיים את כל העבודה.
נציב $x=\frac{3}{4}y$ במשוואה $(*)$ ונקבל:

$$\frac{N\cdot y}{y+\frac{3}{4}y}=\frac{N\cdot\frac{3}{4}y}{y+\frac{3}{4}y}+40 \Rightarrow \frac{4}{7}N=\frac{3}{7}N+40 \Rightarrow \frac{N}{7}=40 \Rightarrow N=280$$

תשובה לסעיף (א): שני הפועלים הכינו יחד 280 חלקים.

(2) $a_{n+1} = 3a_n \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 = const$

לכן הסדרה הנתונה היא סדרה הנדסית (אם $a_1 \neq 0$) שמנתה $q_1 = 3$.

(א) **דרך I:** נמצא את היחס בין שני איברים עוקבים בסדרה b_n :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} + 3a_{n+2}}{a_n + 3a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + 3 \cdot 3a_{n+1}}{\frac{1}{3}a_{n+1} + 3a_{n+1}} = \frac{10a_{n+1}}{\frac{10}{3}a_{n+1}} = 3 = const$$

כלומר הסדרה b_n היא סדרה הנדסית שמנתה $q = 3$.

דרך II: אם a_n היא סדרה הנדסית שמנתה $q_1 = 3$, אז:

$$b_n = a_n + 3a_{n+1} = a_n + 3 \cdot 3a_n = 10a_n$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{10a_{n+1}}{10a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$$

(ב) $a_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 2 \cdot 3 = 6 \quad \Rightarrow \quad b_1 = a_1 + 3a_2 = 2 + 3 \cdot 6 = 20$

$$S_n^{\{b_n\}} = b_1 + b_2 + ... + b_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 20 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = 10(3^n - 1)$$

(ג) $L = 15 \cdot (a_{n+1} - a_n) = 15 \cdot (a_1 \cdot q^n - a_1 \cdot q^{n-1}) =$

$$= 15a_1q^{n-1} \cdot (q - 1) = 15 \cdot 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 = 60 \cdot 3^{n-1} = 20 \cdot 3^n$$

$$R = 2 \cdot S_n + 20 = 2 \cdot 10 \cdot (3^n - 1) + 20 = 20 \cdot 3^n - 20 + 20 = 20 \cdot 3^n$$

$L \equiv R$ מ.ש.ל

(3) נגדיר מאורעות: A – גבר, B – שותה קפה.

נתון: $P(A) = 0.75 \quad \Rightarrow \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.75 = 0.25$

(א) $P(B / A) = \frac{2}{3} \cdot P(B / \bar{A}) \quad \Rightarrow \quad \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})}$

$$\frac{4P(A \cap B)}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4P(\bar{A} \cap B)}{1} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = 2 \cdot P(\bar{A} \cap B)$$

כלומר ההסתברות לבחור גבר השותה קפה גדולה פי 2
מההסתברות לבחור אישה השותה קפה.

המשך בעמוד הבא ⮜⮜⮜

(ב)
$$P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(B)$$
$$2\cdot P(\bar{A}\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(B)\ \Rightarrow\ P(\bar{A}\cap B)=\tfrac{1}{3}\cdot P(B)$$
$$P(A\cap B)=\tfrac{2}{3}\cdot P(B)\ \Rightarrow\ \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ P(A/B)=\frac{2}{3}$$

כלומר $\frac{2}{3}$ מאלה ששותים קפה הם גברים.

(ג) נבנה טבלת כמויות:

$$N(A)=\tfrac{3}{4}N=\tfrac{3}{4}\cdot 48=36$$
$$N(\bar{A})=N-N(A)=$$
$$=48-36=12$$

נתון: $N(\bar{A}\cap\bar{B})=2$, מכאן:

	B	$\bar{B}$	סה"כ
A	20	16	36
$\bar{A}$	10	2	12
סה"כ	30	18	48

$$N(\bar{A}\cap B)=N(\bar{A})-N(\bar{A}\cap\bar{B})=12-2=10$$

מסעיף (א):
$$P(A\cap B)=2\cdot P(\bar{A}\cap B)$$
$$N(A\cap B)=2\cdot N(\bar{A}\cap B)=2\cdot 10=20$$
$$N(A\cap\bar{B})=N(A)-N(A\cap B)=36-20=16$$

מכאן:
$$N(\bar{B})=16+2=18\ ,\ N(B)=20+10=30\ ,$$

(*i*)
$$N(A\cap\bar{B})=16$$

(*ii*)
$$\frac{N(A\cap\bar{B})}{N(\bar{B})}=\frac{16}{18}=\frac{8}{9}\ \Rightarrow\ \frac{8}{9}\cdot 100\%=\frac{800}{9}\%=88\tfrac{8}{9}\%$$

(4) (א) נסמן: $AD=DE=EF=a$.

$AN^2=AD\cdot AE$ (ריבוע אורך המשיק שווה למכפלת

$\Downarrow$ החותך בחלקו החיצוני)

$AN^2=a\cdot 2a=2a^2$

$FM^2=FE\cdot FD$ (ריבוע אורך המשיק שווה למכפלת

$FM^2=a\cdot 2a=2a^2$ החותך בחלקו החיצוני)

$\Downarrow$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$AN^2 = FM^2$

$\Downarrow$

$AN = FM$

ב) $BN = BM$ (שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה)

$\Downarrow$

$AN + NB = FM + MB$ (חיבור גדלים שווים לגדלים שווים)

$\Downarrow$

$BA = BF$ (חיבור קטעים)

$\Downarrow$

ז. $\measuredangle BFA = \measuredangle BAF$ (במשולש מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות)

צ. $FM = AM$ (הוכחנו בסעיף (א))

צ. $FE = AD$ (נתון)

$\Downarrow$

$\Delta FEM \cong \Delta ADN$ (לפי משפט חפיפה צ.ז.צ.)

ג) $AN = FM \;,\; BN = BM$ (הוכחנו בסעיפים קודמים)

$\Downarrow$

$\frac{BN}{AN} = \frac{BM}{FM}$

$\Downarrow$

$NM \,||\, AF$ (משפט הפוך למשפט תאלס)

$\Downarrow$

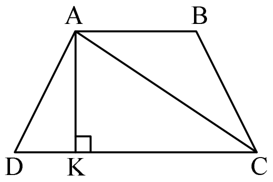
ANMF הוא טרפז

$AN = FM$ (הוכחנו בסעיף (א))

$\Downarrow$

ANMF הוא טרפז שווה-שוקיים

מ.ש.ל.



(5) (א) לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔADC :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos \measuredangle D$$

$$AC^2 = d^2 + a^2 - 2ad\cos\beta \quad (*)$$

נעביר $AK \perp DC$.

$$DK = \frac{DC - AB}{2} = \frac{a-b}{2}$$

במשולש ישר-זווית ADK :

$$\cos\beta = \frac{DK}{AD} \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{a-b}{2d}$$

נציב את הערך של $\cos\beta$ ב- $(*)$:

$$AC^2 = d^2 + a^2 - 2ad \cdot \frac{a-b}{2d} =$$

$$= d^2 + a^2 - a^2 + ab = ab + d^2$$

$$AC = \sqrt{ab + d^2}$$

(ב) $\measuredangle BCD = \measuredangle CDA = \beta$ (זווית בסיס שוות בטרפז שווה-שוקיים)

$\measuredangle ACB = \beta - \alpha$ (חיסור זוויות)

לפי משפט הסינוסים ב- ΔABC :

$$\frac{AB}{\sin \measuredangle C} = \frac{BC}{\sin \measuredangle A}$$

$$\frac{b}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d}{b} \quad (**)$$

$$\alpha + \beta = 90° \quad \Rightarrow \quad \measuredangle DAC = 180° - \alpha - \beta = 90°$$

(סכום זוויות ב- ΔACD שווה ל- $180°$).

לפי משפט פיתגורס ב- ΔACD :

$$AD^2 + AC^2 = DC^2$$

$$d^2 + ab + d^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a^2 - 2d^2}{a}$$

נציב את הביטוי שקיבלנו ב- $(**)$ ונקבל:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d}{\frac{a^2-2d^2}{a}} = \frac{ad}{a^2 - 2d^2}$$

(6) נתון: $6x+3y=\mathrm{a} \;\Rightarrow\; y=\frac{\mathrm{a}}{3}-2x$

(א) פונקציית המטרה: $M(x)=3\cdot xy=3x\cdot\left(\frac{\mathrm{a}}{3}-2x\right)=\mathrm{a}x-6x^2$

$$M'(x)=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{a}-12x=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{\mathrm{a}}{12} \;\Rightarrow\; y=\frac{\mathrm{a}}{3}-\frac{\mathrm{a}}{6}=\frac{\mathrm{a}}{6}$$

$$M''(x)=-12<0 \;\Rightarrow\; \max$$

תשובה: עבור $y=\frac{\mathrm{a}}{6}$, $x=\frac{\mathrm{a}}{12}$ שטח המעטפת יהיה מקסימלי.

(ב) פונקציית המטרה: $V(x)=S_{\text{בסיס}}\cdot h=\frac{x^2\sin 60^\circ}{2}\cdot y=$

$$=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{\mathrm{a}}{3}-2x\right)$$

$$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{\mathrm{a}x^2}{3}-2x^3\right)$$

$$V'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{2\mathrm{a}x}{3}-6x^2\right)=0 \;\Rightarrow\; 2x\cdot\left(\frac{\mathrm{a}}{3}-3x\right)=0$$

$$x_1=0\ ,\ x_2=\frac{\mathrm{a}}{9}$$

x	$x=0$	$0<x<\frac{a}{9}$	$x=\frac{a}{9}$	$x>\frac{a}{9}$
$V'(x)$		+	0	−
$V(x)$		↗	max	↘

$$V'\left(\frac{\mathrm{a}}{10}\right)=(+)\cdot\left(\frac{\mathrm{a}}{3}-\frac{3\mathrm{a}}{10}\right)>0$$

$$V'\left(\frac{\mathrm{a}}{8}\right)=(+)\cdot\left(\frac{\mathrm{a}}{3}-\frac{3\mathrm{a}}{8}\right)<0$$

$$x=\frac{\mathrm{a}}{9} \;\Rightarrow\; y=\frac{\mathrm{a}}{3}-\frac{2\mathrm{a}}{9}=\frac{\mathrm{a}}{9}$$

תשובה: עבור $x=y=\frac{\mathrm{a}}{9}$ נפח המנסרה יהיה מקסימלי.

(7) אם לגרפים יש משיק משותף בנקודה $(0,0)$, אז : $g'(0)=f'(0)$

$$f'(x)=2x-4 \qquad g'(x)=3\mathrm{m}x^2+\mathrm{n}$$

$$2\cdot 0-4=3\mathrm{m}\cdot 0+\mathrm{n} \;\Rightarrow\; \mathrm{n}=-4$$

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודות שבהן : $x^2-4x=0$

$$x(x-4)=0 \;\Rightarrow\; x_1=0\ ,\ x_2=4$$

אז : $g(4)=f(4) \;\Rightarrow\; 64\mathrm{m}-4\cdot 4=16-4\cdot 4 \;\Rightarrow\; \mathrm{m}=\frac{1}{4}$

כלומר : $g(x)=\frac{x^3}{4}-4x$

נבדוק האם יש נקודות חיתוך נוספות בין הגרפים :

$$f(x)=g(x) \;\Rightarrow\; x^2\cancel{-4x}=\frac{x^3}{4}\cancel{-4x} \;\Rightarrow\; x^2\left(1-\frac{x}{4}\right)=0$$

$$x_1=0\ ,\ x_2=4$$

יש רק שתי נקודות חיתוך בין הגרפים.

$$\mathrm{I}=\int_0^4[g(x)-f(x)]dx=\int_0^4\left(\frac{x^3}{4}\cancel{-4x}-x^2\cancel{+4x}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^4}{16}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4=\frac{256}{16}-\frac{64}{3}=16-21\frac{1}{3}=-5\frac{1}{3}$$

ביטוי זה שלילי, לכן : $S_{\text{מבוקש}}=-\mathrm{I}=-\left(-5\frac{1}{3}\right)=$ יחידות שטח $5\frac{1}{3}$

(8) נבטא באמצעות a את שיעורי נקודות החיתוך בין הגרפים (הנקודות N ו- M).

$$4-x^2=(\mathrm{a}^2-1)x^2 \;\Rightarrow\; x^2(\mathrm{a}^2-1+1)=4 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{4}{\mathrm{a}^2}$$

$$x_1=\frac{2}{\mathrm{a}} \;\Rightarrow\; y_1=-\frac{4}{\mathrm{a}^2}+4 \;\Rightarrow\; \mathrm{N}\left(\frac{2}{\mathrm{a}},4-\frac{4}{\mathrm{a}^2}\right)$$

$$x_2=-\frac{2}{\mathrm{a}} \;\Rightarrow\; y_1=-\frac{4}{\mathrm{a}^2}+4 \;\Rightarrow\; \mathrm{M}\left(-\frac{2}{\mathrm{a}},4-\frac{4}{\mathrm{a}^2}\right)$$

$y_{\mathrm{N}}=y_{\mathrm{M}} \;\Rightarrow\; \mathrm{MN}\parallel$ ציר ה- x $\;\Rightarrow\; \mathrm{MN}\perp$ ציר ה- y

המשך בעמוד הבא >>>

פונקציית המטרה:
$$S(\mathrm{a}) = S_{\Delta \mathrm{OMN}} = \frac{\mathrm{MN} \cdot \mathrm{h}}{2} = \frac{x_{\mathrm{N}} - x_{\mathrm{M}}}{2} \cdot y_{\mathrm{M}} =$$
$$= \frac{4}{\mathrm{a} \cdot 2} \cdot \left(4 - \frac{4}{\mathrm{a}^2}\right) = 8 \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{a}} - \frac{1}{\mathrm{a}^3}\right)$$
$$S'(\mathrm{a}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 8 \cdot \left(-\frac{1}{\mathrm{a}^2} + \frac{3}{\mathrm{a}^4}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{\mathrm{a}^4}\left(-\mathrm{a}^2 + 3\right) = 0$$
$$\mathrm{a}^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a} = \pm\sqrt{3} > 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a} = \sqrt{3}$$
$$S''(\mathrm{a}) = 8 \cdot \left(\frac{2}{\mathrm{a}^3} - \frac{12}{\mathrm{a}^5}\right)$$
$$S''\left(\sqrt{3}\right) = 8 \cdot \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{12}{9\sqrt{3}}\right) = 8 \cdot \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{4}{3\sqrt{3}}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \max$$

תשובה: עבור $\mathrm{a} = \sqrt{3}$ שטח המשולש OMN יהיה מקסימלי.

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929