פתרון מבחן מס' 21 (ספר מבחנים – שאלון 035805)

(1) (א) הסדרה המקורית: $a_1 \; , \; a_2 \; , \; a_3 \; , \; \dots$ (מנתה q).

הסדרה עם הסימנים המתחלפים: $a_1 \; , \; -a_2 \; , \; a_3 \; , \; -a_4 \; , \; \dots$

(מנתה $-q$).

נתון:
$$a_1+a_2+a_3=61 \quad \Rightarrow \quad a_1(1+q+q^2)=61$$
$$9\cdot\frac{a_1}{1+q}=\frac{a_1}{1-q} \quad \Rightarrow \quad 9-9q=1+q \quad \Rightarrow \quad q=0.8$$

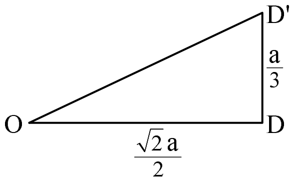
(ב)
$$a_1(1+0.8+0.8^2)=61 \quad \Rightarrow \quad a_1=\frac{61}{2.44}=25$$
$$S_{\text{מקורית}}=\frac{a_1}{1-q}=\frac{25}{1-0.8}=125$$

(2) הזווית המבוקשת היא $\measuredangle D'OD$.

לפי משפט פיתגורס ב- ΔABD :
$$BD^2=AB^2+AD^2$$
$$BD^2=a^2+a^2 \quad \Rightarrow \quad BD^2=2a^2 \quad \Rightarrow \quad BD=\sqrt{2}a \text{ ס״מ}$$

אלכסונים בריבוע חוצים זה את זה, לכן:
$$DO=\frac{BD}{2}=\frac{\sqrt{2}a}{2} \text{ ס״מ}$$

ב- $\Delta D'OD$:



$$\tan\measuredangle D'OD=\frac{\frac{a}{3}}{\frac{\sqrt{2}a}{2}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$
$$\measuredangle D'OD=25.24^\circ$$

(3) (א) נתון: $f'(3)=0$.

$$f'(x)=-1\cdot x^{\frac{3}{4}}+(\mathrm{a}-x)\cdot\tfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=x^{-\frac{1}{4}}\left(-x+\tfrac{3}{4}\mathrm{a}-\tfrac{3}{4}x\right)$$

$$f'(x)=x^{-\frac{1}{4}}\left(-1\tfrac{3}{4}x+\tfrac{3}{4}\mathrm{a}\right)=-\tfrac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}}(7x-3\mathrm{a})$$

$$f'(3)=0 \quad\Rightarrow\quad -\tfrac{1}{4}\cdot 3^{-\frac{1}{4}}(7\cdot 3-3\mathrm{a})=0$$

$$21-3\mathrm{a}=0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{a}=7$$

(ב) (*i*)

$$f(x)=(7-x)\sqrt[4]{x^3}=(7-x)\cdot x^{\frac{3}{4}}$$

תחום הגדרה:

$$x^3\ge 0 \quad\Rightarrow\quad x\ge 0$$

(*ii*) + (*iii*)

$$f'(x)=-\tfrac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}}(7x-21)$$

$$f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 7x-21=0 \quad\Rightarrow\quad x=3$$

$$f(3)=4\cdot\sqrt[4]{3^3}=4\cdot\sqrt[4]{27} \quad\Rightarrow\quad \left(3,4\cdot\sqrt[4]{27}\right)$$

נקודת הקצה:

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad f(0)=0 \quad\Rightarrow\quad (0,0)$$

x	x = 0	0 < x < 3	x = 3	x > 3
f′(x)		−	0	+
f(x)		↘	min	↗

$$f'(1)=-\tfrac{1}{4}\cdot(7-21)>0 \ ,\ f'(4)=-\tfrac{1}{4}\cdot 4^{-\frac{1}{4}}\cdot(28-21)<0$$

לכן: $\min\left(0,0\right)$, $\max\left(3,4\cdot\sqrt[4]{27}\right)$.

תחום עלייה: $0\le x<3$, תחום ירידה: $x>3$.

(*iv*)

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad f(0)=0 \quad\Rightarrow\quad (0,0)$$

$$f(x)=0 \quad\Rightarrow\quad (7-x)\cdot x^{\frac{3}{4}}=0$$

$$7-x=0 \quad\Rightarrow\quad x=7 \quad\Rightarrow\quad (7,0)$$

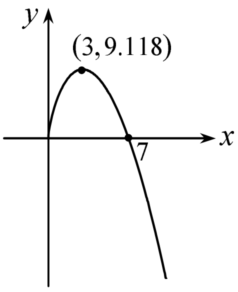
$$x=0 \quad\Rightarrow\quad f(0)=0 \quad\Rightarrow\quad (0,0)$$

תשובה: שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים:

$(7,0)$, $(0,0)$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ג) ראו סרטוט משמאל.



(ד) $(i)+(ii)$

$g'(x)=f(x)$ מתאפסת

כאשר $x=7$ (בתחום $x>0$)

$g'(x)>0$ עבור $0<x<7$

ו- $g'(x)<0$ עבור $x>7$,

לכן $g(x)$ עולה עבור $0<x<7$ ויורדת עבור $x>7$,

כלומר ל- $g(x)$ יש נקודת מקסימום בנקודה שבה $x=7$.

(iii) יש למצוא את $g'(16)$.

$$g'(16)=f(16)=(7-16)\cdot\sqrt[4]{16^3}=-9\cdot 8=-72$$

(4)

$$f(-1)=2^{-2}-9\cdot 2^{-2}+3\cdot 2^{1}=\tfrac{1}{4}-\tfrac{9}{4}+6=4 \quad\Rightarrow\quad (-1,4)$$

$$f(1)=2^{4}-9\cdot 2^{2}+3\cdot 2^{3}=16-36+24=4 \quad\Rightarrow\quad (1,4)$$

$$f'(x)=2^{3x+1}\cdot 3\cdot\ln 2-9\cdot 2^{2x}\cdot 2\cdot\ln 2+3\cdot 2^{x+2}\cdot 1\cdot\ln 2$$

$$f'(x)=2^{x}\cdot 3\ln 2(2^{2x+1}-6\cdot 2^{x}+2^{2})$$

$f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 2^{x}=0$ או $2\cdot 2^{2x}-6\cdot 2^{x}+4=0$

למשוואה $2^{x}=0$ אין פתרון, לכן נישאר עם $2\cdot 2^{2x}-6\cdot 2^{x}+4=0$.

נסמן: $2^{2x}=\mathrm{t}$ ונקבל משוואה ריבועית: $2\mathrm{t}^2-6\mathrm{t}+4=0 \quad /:2$

$$\mathrm{t}^2-3\mathrm{t}+2=0 \quad\Rightarrow\quad (\mathrm{t}-2)(\mathrm{t}-1)=0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{t}_1=1\ ,\ \mathrm{t}_2=2$$

$$2^{x}=1 \quad\Rightarrow\quad 2^{x}=2^{0} \quad\Rightarrow\quad x=0$$

$$f(0)=2^{1}-9\cdot 2^{0}+3\cdot 2^{2}=5 \quad\Rightarrow\quad (0,5)$$

$$2^{x}=2 \quad\Rightarrow\quad 2^{x}=2^{1} \quad\Rightarrow\quad x=1 \quad\Rightarrow\quad (1,4)$$

ואז: $(1,4)$ מינימום מוחלט , $(-1,4)$ מינימום מוחלט , $(0,5)$ מקסימום מוחלט .

(5) (א) $f(x)=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \sin x=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{6}$ (בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{4}$)

ואז: $g(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}=\cos\frac{a\cdot\frac{\pi}{6}}{3}$

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi a}{18} \;\Rightarrow\; \frac{\pi a}{18}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k \;\Rightarrow\; a=\pm 6+36k$$

בתחום $0<a<10$ נקבל: $a=6$.

(ב) $f(0)=\sin 0=0$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos 2x)\,dx=$$

$$=\left(\frac{\sin 2x}{2}+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\left(-\cos x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(0+1\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=$$

$=$ 0.39 יחידות שטח

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות