

פתרונות מבחון מס' 38 (ספר מבחנים – שאלון 035804)

(1) (א) מהירות ההתקראבות של שני הרכבים היא $(v + 75)$ קמ"ש, לכן הזמן שעבר מיציאת הרכבים ועד הפגיעה:
 $t = \frac{160}{v+75}$ שעות

לפי הנתון בשאלת, נרכיב את המשוואות:

$$\begin{cases} \frac{160}{v+75} < 1 \\ 0 < v \leq 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 160 < v + 75 \\ 0 < v \leq 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v > 85 \\ 0 < v \leq 120 \end{cases}$$

תשובה: $120 \text{ קמ"ש} > v \geq 85 \text{ קמ"ש}$.

(ב) (i) הפגיעה בין הרכבים התרחשה אחרי:
 $t = \frac{160}{100} = 1.6$ שעה - 36 דקות = 1.6 שעות

(ii) הפגיעה בין הרכבים התרחשה לפני:

$$t = \frac{160}{100+75} = \frac{160}{175} = \frac{32}{35} \text{ שעה}$$

רוכב ב' עבר את כל הדרך ב- $\frac{160}{100} = 1\frac{3}{5}$ שעות, כלומר רוכב ב' היה

בדרכ $1\frac{3}{5} - \frac{32}{35} = \frac{24}{35}$ שעה מרגע הפגיעה ועד שהגיע לעיר A.

בזמן זהה, רוכב א' עבר דרך של:

$$S = 75 \cdot \frac{24}{35} = \frac{360}{7} = 51\frac{3}{7} \text{ ק"מ}$$

(2) (א) נקודת B היא נקודת חיתוך הצלעות AB ו- BC, לכן:

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{3} + 6 \\ y = -5x + 20 \end{cases} \Rightarrow -\frac{x}{3} + 6 = -5x + 20 \quad / \cdot 3$$

$$-x + 18 = -15x + 60 \Rightarrow 14x = 42 \Rightarrow x = 3$$

$$y = -\frac{3}{3} + 6 = 5 \Rightarrow B(3,5)$$

המשך בעמוד הבא ►►

E היא נקודת אמצע הקטע BD (אלכסונים במקבילית חוצים זה את זה),
לכן :

$$\begin{cases} x_E = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow 2 = \frac{3 + x_D}{2} \Rightarrow x_D = 1 \\ y_E = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow 3 = \frac{5 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = 1 \end{cases} \Rightarrow D(1,1)$$

במקבילית, צלעות נגדיות הן מקבילות, לכן :
 $m_{DC} = m_{AB} = -\frac{1}{3}$
 $y - y_D = m_{DC}(x - x_D) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$: DC
 $y = -\frac{x}{3} + \frac{4}{3}$: לכן

נקודת C היא נקודת חיתוך הצלעות DC ו- BC , לכן :

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{3} + \frac{4}{3} \\ y = -5x + 20 \end{cases} \Rightarrow -\frac{x}{3} + \frac{4}{3} = -5x + 20 \quad / \cdot 3$$

$$-x + 4 = -15x + 60 \Rightarrow 14x = 56 \Rightarrow x = 4$$

$$y = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow C(4,0)$$

אלכסוני מקבילית חוצים זה את זה, כלומר הנקודה E היא נקודת אמצע
הקטע AC , לכן :

$$\begin{cases} x_E = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 2 = \frac{x_A + 4}{2} \Rightarrow x_A = 0 \\ y_E = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 3 = \frac{y_A + 0}{2} \Rightarrow y_A = 6 \end{cases} \Rightarrow A(0,6)$$

. A(0,6) , B(3,5) , C(4,0) , D(1,1) תשובה :

(ב) רדיוס המרجل המבוקש הוא הקטע BD , לכן :

$$BD = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{20}$$

משוואת המרجل : $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 20$

(ג) ישרים מאונכים זה לזה רק אם מכפלת שיפועיהם שווה ל- -1 .

$$m_{DC} = -\frac{1}{3} \quad m_{BD} = \frac{y_B - y_D}{x_B - x_D} = \frac{5 - 1}{3 - 1} = 2$$

$$m_{DC} \cdot m_{BD} = -\frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{2}{3} \neq -1$$

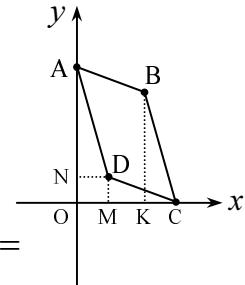
DC אינו מאונך ל- BD (שהוא רדיוס לנקודת ההשקה),

לכן DC אינו משיק למרגל B .

המשך בעמוד הבא ►►

(ד) בشرطוט BK ו- DM אנכים לציר ה- x ו- DN אנך לציר ה- y .

$$\begin{aligned}
 S_{ABCD} &= S_{ABKO} + S_{\Delta KBC} - S_{AO MD} - S_{\Delta MDC} = \\
 &= \frac{AO + BK}{2} \cdot OK + \frac{BK \cdot KC}{2} - \\
 &\quad - \frac{AO + DM}{2} \cdot OM - \frac{DM \cdot MC}{2} = \\
 &= \frac{y_A + y_B}{2} \cdot x_K + \frac{y_B \cdot (x_C - x_K)}{2} - \\
 &\quad - \frac{y_A + y_D}{2} \cdot x_M - \frac{y_D \cdot (x_C - x_M)}{2} = \\
 &= \frac{6+5}{2} \cdot 3 + \frac{5 \cdot (4-3)}{2} - \frac{6+1}{2} \cdot 1 - \frac{1 \cdot (4-1)}{2} = \\
 &= 16.5 + 2.5 - 3.5 - 1.5 = 14
 \end{aligned}$$



(3)

סמי		צלית		רמי		תומכים
נשים	גברים	נשים	גברים	נשים	גברים	
260	300	180	60	80	320	

בsek הכל השתתפי בסקר :

$$320 + 80 + 60 + 180 + 300 + 260 = 1,200$$

$$P(\text{תומך/ת בדליה}) = \frac{180 + 60}{1,200} = \frac{240}{1,200} = \frac{1}{5} \quad (\text{א})$$

$$P(\text{תומך/ת בדליה / נבחרה אישה}) = \frac{180}{180 + 60} = \frac{180}{240} = \frac{3}{4} \quad (\text{ב})$$

$$P(\text{nבחר גבר / תומך בסמי}) = \frac{300}{300 + 60 + 320} = \frac{300}{680} = \frac{15}{34} \quad (\text{ג})$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{אינו תומך/ת בדליה / גבר התומך בסמי}) &= \\
 &= \frac{300}{1,200 - (180 + 60)} = \frac{300}{960} = \frac{5}{16} \quad (\text{ד})
 \end{aligned}$$

(א) (4) BD = BF (שני מישקים למעגל היוצאים מאותה נקודת שווים באורכם)

CE = CF (שני מישקים למעגל היוצאים מאותה נקודת שווים באורכם)

$$P_{ABC} = AB + BC + AC$$

$$P_{ABC} = AB + BF + FC + AC \quad \downarrow$$

$$P_{ABC} = AB + BD + CE + AC \quad (\text{חיבור}) \quad P_{ABC} = AD + AE \quad (\text{חיבור קטעים}). \text{ מ.ש.ל}$$

(ב) (i) OF \perp BC (רדיוס لنקודת השקה מאונך למישק)

OE \perp CE (רדיוס لنקודת השקה מאונך למישק)



$$\angle OEC = 90^\circ$$

$$\angle OFC = 90^\circ$$

$$\angle FCE = 90^\circ \quad (\text{נתון})$$

CF = CE (חסבנו בסעיף (א))



ריבוע OFCE (מרובע שלוש זוויותיו ישרות הוא מלבן,

מלבן שתתי צלעות סמוכות שלו שוות

הוא ריבוע)



$$CE = CF = OF = OE = R$$

נתבונן במשולש ישר-זווית :

$$AB = 2BC = 2(R + \sqrt{3}) =$$

נמצא ניצב השווה למחצית היתר

$$= 2R + 2\sqrt{3} \quad \downarrow$$

$$AD = DB + BA = \sqrt{3} + 2(R + \sqrt{3}) = 2R + 3\sqrt{3}$$

BD = BF (שני מישקים למעגל היוצאים מאותה נקודת שווים זה לזה)

המשך בעמוד הבא <<

$$AC = AE - EC = 2R + 3\sqrt{3} - R = R + 3\sqrt{3}$$

: ΔABC ב- **משפט פיתגורס**

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$

$$(R + \sqrt{3})^2 + (R + 3\sqrt{3})^2 = (2R + 2\sqrt{3})^2$$

$$R^2 + 2R\sqrt{3} + 3 + R^2 + 6\sqrt{3}R + 27 = 4R^2 + 8R\sqrt{3} + 12$$

$$2R^2 = 18 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = \pm 3 > 0$$

$$R = 3 \text{ ס"מ}$$

$$S_{\text{גיאומטריה}} = S_{\text{ODEK}} + S_{\text{OFE}} + S_{\text{DOF}} \quad ①$$

$$\angle DBF = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\angle ODB = \angle BFD = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \angle DOF &= 360^\circ - \angle DBF - \angle ODB - \angle BFD = \\ &= 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 60^\circ \end{aligned}$$

(סכום זוויות מרובע $ODBF$ שווה ל- 360°).

כלומר ΔODF הוא משולש שווה-צלעות (משולש שווה-שוקיים)

בעל זוויות בת 60° הוא שווה-צלעות)

$$S_{\Delta ODF} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad \text{a) היא צלע המשולש השווה-צלעות}$$

$$S_{\Delta ODF} = \frac{3^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \quad ②$$

$$S_{\Delta OFE} = \frac{1}{2} S_{\text{OFCE}} = \frac{1}{2} \cdot 3^2 = \frac{9}{2} \text{ סמ"ר} \quad ③$$

(אלכסון של ריבוע מחלק את הריבוע לשני משולשים חופפים)

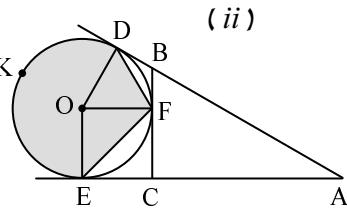
$$\angle DOF = 60^\circ, \angle FOE = 90^\circ$$

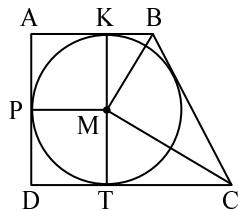
$$\angle DOE(K) = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 210^\circ$$

$$S_{\text{ODEK}} = \frac{210^\circ}{360^\circ} \cdot S_{\text{圓}} = \frac{7}{12} \cdot \pi R^2 = \frac{7}{12} \pi \cdot 3^2 = \frac{21}{4} \pi \text{ סמ"ר} \quad ④$$

נציב את ④, ② ב-, ③ ונקבל:

$$S_{\text{גיאומטריה}} = \left(\frac{21}{4} \pi + \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{2} \right) \approx 24.89$$





(5) שטח העיגול שווה ל- πR^2
לכן מטרת השאלה היא למצוא את R .
נעביר רדיוסים לנקודות הנקודה: MP , MK ו- MT .
הרדיאוסים מאונכים לצלעות המתאימות.

$$\angle MCT = \frac{\alpha}{2}$$

משיקים למעגל עם מרכז המעגל,

חותם את הזווית בין המשיקים)

$$MK = MP = MT = R$$

$$\angle ABC = 180^\circ - \alpha$$

מקבילים שווה ל- 180° , חיסור זווית

$$\angle KBM = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

משיקים למעגל עם מרכז המעגל,

חותם את הזווית בין המשיקים)

$$\tan \angle C = \frac{MT}{TC} \Rightarrow TC = \frac{MT}{\tan \angle C} \quad : \Delta MTC \text{ - ב-}$$

$$TC = \frac{R}{\tan \frac{\alpha}{2}}, DT = R \Rightarrow DC = DT + CT = R + \frac{R}{\tan \frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan \angle B = \frac{KM}{KB} \Rightarrow KB = \frac{KM}{\tan \angle B} \quad : \Delta BKM \text{ - ב-}$$

$$KB = \frac{R}{\tan(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} = R \tan \frac{\alpha}{2}, AK = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = AK + KB = R + R \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$S_{ABCD} = 20 = \frac{AB + DC}{2} \cdot AD = \frac{\left(R + R \tan \frac{\alpha}{2}\right) + \left(R + \frac{R}{\tan \frac{\alpha}{2}}\right)}{2} \cdot 2R$$

$$20 = R^2 \left(2 + \tan \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{R^2}{\tan \frac{\alpha}{2}} \left(\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \tan \frac{\alpha}{2} + 1\right) =$$

$$= \frac{R^2}{\tan \frac{\alpha}{2}} \left(1 + \tan \frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$R^2 = \frac{20 \tan \frac{\alpha}{2}}{\left(1 + \tan \frac{\alpha}{2}\right)^2} \Rightarrow S_{\text{היקום}} = \pi R^2 = \frac{20 \pi \tan \frac{\alpha}{2}}{\left(1 + \tan \frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

$$S_{\text{BFDE}} = S_{\text{ABCD}} - S_{\Delta \text{ABE}} - S_{\Delta \text{BCF}} = 1^2 - \frac{x+1}{2} - \frac{y+1}{2} = 1 - \frac{x+y}{2} \quad (6) \quad (\text{א})$$

(ב) לפי הנתון : $x + y = 1 - xy \Rightarrow y(1+x) = 1-x \Rightarrow y = \frac{1-x}{1+x}$

$$\begin{aligned} S_{\text{BFDE}} &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}y = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x+x^2+1-x}{1+x} = \\ &= 1 - \frac{1+x^2}{2(1+x)} = \frac{2+2x-1-x^2}{2(1+x)} = \text{סימ"ר } \frac{-x^2+2x+1}{2(1+x)} \end{aligned}$$

(ג) פונקציית המטרה : $F(x) = S_{\text{BEDF}}$

$$F'(x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{-x^2+2x+1}{2(1+x)} \right)' = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(-2x+2)(x+1) - 1 \cdot (-x^2+2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2+2+x^2-2x-1}{2(x+1)^2} = 0$$

$$-x^2-2x+1=0 \Rightarrow x^2+2x-1=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

. $x = \sqrt{2} - 1$: לכן $x > 0$

x	$0 < x < \sqrt{2} - 1$	$x = \sqrt{2} - 1$	$\sqrt{2} - 1 < x < 1$
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$	↗	max	↘

$$F'(0.4) = \frac{-0.4^2 - 2 \cdot 0.4 + 1}{+} > 0 \quad F'(0.9) = \frac{-0.9^2 - 2 \cdot 0.9 + 1}{+} < 0$$

תשובה : עבור $x = \sqrt{2} - 1$ שטח המרובע BFDE הוא מקסימלי.

$$y = \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-\sqrt{2}+1}{1+\sqrt{2}-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} S_{\text{BEDF}} &= 1 - \frac{x+y}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{2}-1}{2} = \\ &= 1 - (\sqrt{2}-1) = \text{סימ"ר } (2-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

(7) (א) נתון כי לגרף הפונקציה יש "חור", כלומר קיימים ערך עבור המשתנה x שעבורו גם המונה וגם המכנה מותאפסים.

$$x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(1-x) = 0$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow 0^2 - 5 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

פתרון זה נפסל, כי נתון: $c \neq 0$

$$x_2 = 1 \Rightarrow 1^2 - 5 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = 4$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x^3}{x^2 - 5x + 4} = \frac{x^2(1-x)}{(x-4)(x-1)}$$

לכן:

$$(x-4)(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1, x \neq 4$$

(ב) תחום הגדרה:

אם $x \neq 1, x \neq 4$

$$f(x) = \frac{x^2(1-x)^{-1}}{(x-4)(x-1)} = -\frac{x^2}{x-4} = \frac{x^2}{4-x}$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{-0}{0-4} = 0 \Rightarrow (0,0)$$

(ג)

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4-x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$$f'(x) = \frac{2x(4-x) - x^2 \cdot (-1)}{(4-x)^2} = \frac{-x^2 + 8x}{(4-x)^2}$$

(ד)

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(-x+8) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$$x = 8 \Rightarrow y = \frac{8^2}{4-8} = -16 \Rightarrow (8,-16)$$

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 4$
$f'(x)$	—	0	+	נקודות אי-הגדרה	+
$f(x)$	↘	min	↗		↗

x	$x = 4$	$4 < x < 8$	$x = 8$	$x > 8$
$f'(x)$	נקודות אי-הגדרה	+	0	—
$f(x)$		↗	max	↘

המשך בעמוד הבא ►►

$$\begin{array}{ll} f'(-1) = \frac{-1-8}{+} < 0 & f'(0.5) = \frac{-0.25+4}{+} > 0 \\ f'(3) = \frac{-9+24}{+} > 0 & f'(5) = \frac{-25+40}{+} > 0 \\ f'(9) = \frac{-81+72}{+} < 0 & \end{array}$$

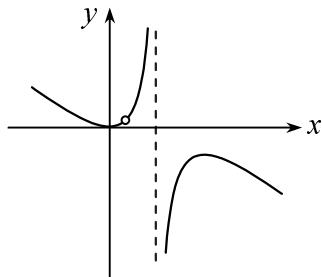
כלומר : $\min(0,0)$, $\max(8,-16)$

(ח) $x = 4$ היא משווה אסימפטוטה אנכית.

הfonקציה לא מוגדרת בנקודה שב $x = 1$, ובנקודה זו יש "חור" בגרף

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1^2}{4-1} = \frac{1}{3}$$

כמו כן, אין אסימפטוטה אופקית לגרף הfonקציה.



(ו) ראו סרטוט משמאל.

$$(z) g(x) = f(x) + 4$$

כדי לקבל את גרף הfonקציה (z)
יש להעלות את גרף הfonקציה $f(x)$
4 יחידות למעלה.

כלומר, שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הfonקציה (z)
מתקינות עבור אותם הערכים של הfonקציה $(f(x))$,
אך ערכי הfonקציה $(g(x))$ גדולים ב- 4 מהערכים המתאימים
של הfonקציה $(f(x))$.

(א) תחום הגדרה :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\left(a + \frac{b}{2\sqrt{x-1}}\right)x - (ax + b\sqrt{x-1})}{x^2} = 0 \quad (\text{ב})$$

$$ax + \frac{bx}{2\sqrt{x-1}} - ax - b\sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow \frac{bx - 2bx + 2b}{2\sqrt{x-1}} = 0$$

$$-bx + 2b = 0 \Rightarrow b(2-x) = 0$$

הפתרון $b = 0$ נפסל, כי נתון $b > 0$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{2a+b}{2}$$

נסמן : $A = -bx + 2b$ (מונה הנגזרת). מכיוון שהמכנה של

הוא תמיד חיובי, הרי שבנקודה החשודה לקייזן, הסימן של הנגזרת השנייה
של $f(x)$ זהה לסימן של A' .

 $A' = (-bx + 2b)' = -b < 0 \Rightarrow \max$

כלומר :

נקודות קצה של תחום ההגדרה :

$$x = 1 \Rightarrow y = \frac{a+0}{1} = a \Rightarrow \min(1, a)$$

$$y_{\min} = 2 \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow a = 2 \quad (\text{א})$$

(ד) הפונקציה עולה כאשר $1 \leq x < 2$ הפונקציה יורדת כאשר $x > 2$.(ה) המשיק הוא ישר יורד היוצר משולש שווה-שוקיים עם הצירים,
לכן שיפועו $m = -1$.

$$\text{גרף הפונקציה } f'(x) \text{ חותך את ציר ה-} x \text{ בנקודה שבה } y = 0, \text{ לכן :}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$y - 0 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 2 \quad \text{משוואת המשיק :}$$

המשך בעמוד הבא ►►

$$S = - \int_2^4 f'(x) dx = -f(x) \Big|_2^4 = -[f(4) - f(2)] = f(2) - f(4) \quad (1)$$

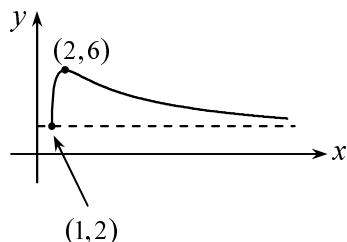
$$f(2) - f(4) = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$\frac{2 \cdot 2 + b\sqrt{2-1}}{2} - \frac{2 \cdot 4 + b\sqrt{4-1}}{4} = 4 - 2\sqrt{3} \quad / \cdot 4$$

$$8 + 2b - 8 - b\sqrt{3} = 16 - 8\sqrt{3}$$

$$b(2 - \sqrt{3}) = 8(2 - \sqrt{3}) \Rightarrow b = 8$$

(2) ראו סרטוט משמאל.





טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

❖ לכל ה大雨ות ❖ לכל השאלונים ❖ לכל הרמות