

פתרונות מבחון מס' 37 (ספר מבחנים – שאלון 035804)

- (1) (א) נסמן ב- x קמ"ש את מהירות ההליכה מ- A ל- B
ואז $(x + 4)$ קמ"ש היא מהירות ההליכה מ- B ל- A.

$$\bar{v} = \frac{\text{טחן שעה}}{\text{טחן שעבר}} = \frac{AB + BA}{t_{AB} + t_{BA}} = 3$$

המהירות הממוצעת של כל הדרך:

$$t_{AB} = \frac{AB}{v_{AB}} = \frac{36}{x}, \quad t_{BA} = \frac{BA}{v_{BA}} = \frac{36}{x+4}$$

$$\frac{36 + 36}{\frac{36}{x} + \frac{36}{x+4}} = 3 \Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}} = 3 \Rightarrow \frac{2x(x+4)}{x+4+x} = 3$$

$$6x + 12 = 2x^2 + 8x \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -3$$

הפתרון $x_2 = -3$ נפסל כי מהירות היא גודל חיובי.

$$t_{AB} = \frac{36}{2} = 18 \text{ שעות}, \quad t_{BA} = \frac{36}{2+4} = 6$$

$$18 - 6 = 12$$

תשובה: הדרך הלווי (מ- A ל- B) ארוכה 12 שעות יותר מאשר הדרך חזרה (מ- B ל- A).

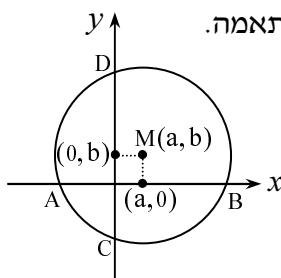
- (2) (א) נעביר אנכים מהנקודה M לצירים x ו- y

החותכים את הצירים בנקודות $(0, b)$, $(a, 0)$ בהתאם.
רדיוס המאונך למיתר חוצה אותו,

לכן הנקודה $(a, 0)$ היא נקודת אמצע AB
והנקודה $(0, b)$ היא נקודת אמצע DC.

לפי נוסחת שיעורי אמצע קטע:

$$\begin{cases} a = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \\ b = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1,1)$$



המשך בעמוד הבא <<>

$$R = AM = \sqrt{(1+2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$$

($x-1$)² + ($y-1$)² = 10 משווהת המעלג:

(ב) (i) הנקודה M(1,1) נמצאת על הישר ℓ , כלומר שיעורי הנקודה

$1 - (4k-1) \cdot 1 + 2 = 0$ מקיימים את משווהת הישר:

$$4 - 4k = 0 \Rightarrow k = 1$$

: שיפוע הישר ℓ (ii)

$$y - (4 \cdot 1 - 1)x + 2 = 0 \Rightarrow y = 3x - 2 \Rightarrow m_\ell = 3$$

$m_{MB} = \frac{y_B - y_M}{x_B - x_M} = \frac{0 - 1}{4 - 1} = -\frac{1}{3}$: שיפוע הרדיוס לנקודה B

רדיווס לנקודות השקעה מאונך למשיק,

לכן שיפוע המשיק למעגל בנקודה B :

$$m_B \cdot m_{MB} = -1 \Rightarrow m_B \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow m_B = 3$$

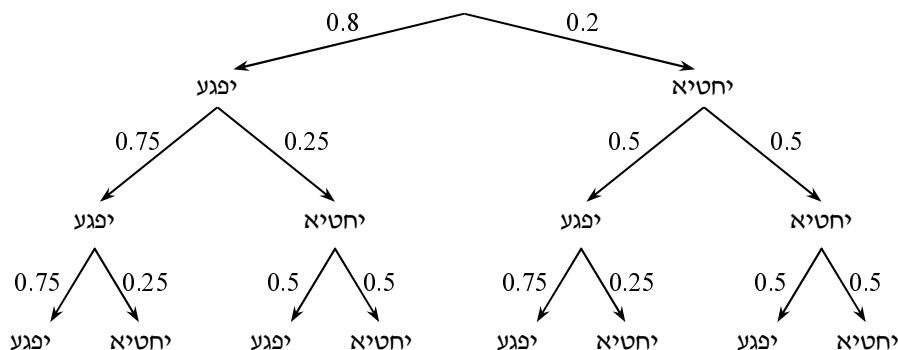
$m_{MC} = \frac{y_C - y_M}{x_C - x_M} = \frac{-2 - 1}{0 - 1} = 3$: שיפוע הרדיוס לנקודה C

$$m_C \cdot m_{MC} = -1 \Rightarrow m_C \cdot 3 = -1 \Rightarrow m_C = -\frac{1}{3}$$

$m_B = m_\ell = 3 \Rightarrow B \parallel \ell$

$m_C \cdot m_\ell = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1 \Rightarrow C \perp \ell$

(3) בניית עץ הסתברויות:



המשך בעמוד הבא <<

$$P(\text{פגיעה אחת מתוך שלוש / פגיעה השניה}) = \text{(א)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(\text{החטיא בראשונה} \cap \text{פגיעה בשניה} \cap \text{החטיא בשלישית})}{P(\text{פגיעה רק בשניה}) + P(\text{פגיעה רק בראשונה})} \\ &= \frac{0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.25}{0.8 \cdot 0.25 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.25 + 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = \\ &= \frac{0.025}{0.1 + 0.025 + 0.05} = \frac{0.025}{0.175} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$P(\text{לא פגע כלל} - (\text{פגיעה באחת מתוך שלוש})) = 1 - P(\text{פגיעה ברוב היריות}) \text{ (ב)}$$

$$\begin{aligned} P(\text{פגיעה ברוב} \cap \text{פגיעה בראשונה}) &= \\ &= P\left(\frac{1}{3}\right) \cdot P\left(\frac{2}{3}\right) \cdot P\left(\frac{3}{3}\right) + P\left(\frac{1}{3}\right) \cdot P\left(\frac{2}{3}\right) \cdot P\left(\frac{3}{3}\right) + P\left(\frac{1}{3}\right) \cdot P\left(\frac{2}{3}\right) \cdot P\left(\frac{3}{3}\right) \end{aligned}$$

$$P(\text{המקרה בסעיף א}) = \text{פגיעה באחת מתוך שלוש} = 0.175$$

$$P(\text{לא פגע כלל}) = P\left(\frac{1}{3}\right) \cdot P\left(\frac{2}{3}\right) \cdot P\left(\frac{3}{3}\right) = 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.05$$

$$\begin{aligned} P(\text{פגיעה ברוב / פגעה בראשונה}) &= \text{(i)} \\ &= \frac{0.8 \cdot 0.75 \cdot 0.75 + 0.8 \cdot 0.75 \cdot 0.25 + 0.8 \cdot 0.25 \cdot 0.5}{1 - 0.175 - 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = \frac{0.7}{0.775} = \frac{28}{31} \end{aligned}$$

(ii) אם הצלף החטיא בשתי היריות הראשונות, משמע הוא יפגע פעם אחת

לכל היוטר, ככלומר לא יפגע ברוב היריות, מכיוון: $P = 0$.

(4) (a) נתבונן במשולשים ABG ו- ACE .

$\angle CAE = \angle GAB$ (כל גודל שווה לעצמו)

$\angle AGB = \angle AEC = 90^\circ$ (נתון)



$\Delta AGB \sim \Delta AEC$ (לפי משפט דמיון ז.ז.)



צלעות מתאימות במשולשים דומים $\frac{AG}{AE} = \frac{AB}{AC}$

מתיחסות באותו יחס



$$AB \cdot AE = AC \cdot AG \quad \textcircled{1}$$

המשך בעמוד הבא ▶▶

(ב) נתבונן במשולשים AFC ו- CBG .

$$\angle AFC = \angle CGB = 90^\circ \quad (\text{נתון})$$

(זווית מתחלפות שוות)

בין ישרים מקבילים



(לפי משפט דמיון ז.ז.) $\Delta AFC \sim \Delta CGB$



$$\frac{AF}{CG} = \frac{AC}{CB} \quad (\text{צלעות מתאימות במשולשים דומים})$$

מתיחסות באותו יחס



$$BC \cdot AF = AC \cdot CG \quad ②$$

(א) לחבר אגפים מתאימים בזווית ① ו- ② :

$$AB \cdot AE + BC \cdot AF = AC \cdot AG + AC \cdot CG$$

$$AB \cdot AE + BC \cdot AF = AC(AG + GC)$$

$$AB \cdot AE + BC \cdot AF = AC \cdot AC = AC^2$$

$$\angle ADC = \angle CBA \quad (\text{בمعنى זווית נגדית שווה זו זו}) \quad (ד)(i)$$

$$\angle FDC = \angle CBE \quad (\text{זווית צמודות לזוויות שוות}) \quad (ז)$$

$$DC = CB \quad (\text{צלעת שווה בمعنى}) \quad (צ)$$

$$\angle DFC = \angle CEB = 90^\circ \quad (\text{נתון})$$

$$\angle FCD = 180^\circ - \angle CDF - 90^\circ \quad (\text{סכום זווית ב- } \Delta CDF)$$

$$\angle BCE = 180^\circ - \angle CBE - 90^\circ \quad (\text{סכום זווית ב- } \Delta BCE)$$



$$\angle FCD = \angle BCE \quad (ז)$$



(לפי משפט חפיפה ז.צ.ז.) $\Delta CDF \cong \Delta CBE$

המשך בעמוד הבא ▶▶▶

$$BC^2 = BE^2 + EC^2 \quad : \Delta BCE \text{ לפי משפט פיתגורס ב-}$$

$$a^2 = BE^2 + b^2 \Rightarrow BE^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow BE = \sqrt{a^2 - b^2}$$

מסעיף (ד)(i) מוכיח $DF = BE = \sqrt{a^2 - b^2}$ (צלעות מתאימות שוות במשולשים חופפים).

$$AB \cdot AE + BC \cdot AF = AC^2 \quad : \text{מסעיף (ג)}$$

$$AC^2 = a(AB + BE) + a(AD + DF) =$$

$$= a(AB + BE + AD + DF) =$$

$$= a(a + \sqrt{a^2 - b^2} + a + \sqrt{a^2 - b^2}) = 2a(a + \sqrt{a^2 - b^2})$$

$$x^2 - 2(2a+1)x + 3a^2 + 2a = 0, a > 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2(2a+1) \pm \sqrt{4(2a+1)^2 - 4(3a^2 + 2a)}}{2} = \\ &= 2a+1 \pm \sqrt{4a^2 + 4a + 1 - 3a^2 - 2a} = 2a+1 \pm \sqrt{a^2 + 2a + 1} = \\ &= 2a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2} = 2a+1 \pm (a+1) \end{aligned} \quad (N)$$

$$x_1 = 3a+2, x_2 = a$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{(3a+2)^2 + a^2 - (7a^2 + 10a + 4)}{2 \cdot a \cdot (3a+2)} = \\ &= \frac{9a^2 + 12a + 4 + a^2 - 7a^2 - 10a - 4}{2a(3a+2)} = \frac{3a^2 + 2a}{2a(3a+2)} = \frac{a(3a+2)}{2a(3a+2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \pm 60^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}$$

$\alpha = 60^\circ$ היא זוויות במשולש, כלומר $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, לכן

המשך בעמוד הבא ▶▶▶

$$, \quad BC = \sqrt{7 \cdot 11^2 + 10 \cdot 11 + 4} = 31 \text{ ס"מ} \quad a = 11 \quad (i) \quad (a)$$

$$\text{ס"מ } 35, \quad AC = 11 \text{ ס"מ}$$

הצלע הגדולה ביותר במשולש היא AB , لكن הזווית הגדולה ביותר

במשולש היא הזווית $\angle C$. לפי משפט הקוסינוסים:

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2 \cdot BC \cdot CA \cdot \cos \angle C$$

$$\cos \angle C = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot CA} = \frac{31^2 + 11^2 - 35^2}{2 \cdot 31 \cdot 11} = -\frac{13}{62}$$

$$\cos \angle C = -\frac{13}{62} \Rightarrow \angle C = 102.103^\circ$$

הערה: במקרה זה עדיף להשתמש במשפט הקוסינוסים ולא

במשפט הסינוסים, כי במקרה האחרון קשה יותר לבחור

את הזווית הנכונה מבין שני הפתרונות האפשריים.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \sin \angle A = \frac{35 \cdot 11}{2} \cdot \sin 60^\circ \approx \quad (ii)$$

$$= 166.71 \text{ יחידות שטח}$$

(a) נמצאו נקודות קיצון פנימיות:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{(x-4)^2} + 1 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 1$$

$$x-4=1 \Rightarrow x_1=5 \Rightarrow y_1=\frac{1}{5-4}+5-4=2 \Rightarrow (5,2)$$

$$x-4=-1 \Rightarrow x_2=3$$

נקודה זו לא שייכת לתחום ההגדרה

x	$4.5 < x < 5$	$x = 5$	$5 < x < 8$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

$$f'(4.6) = -\frac{1}{0.6^2} + 1 < 0, \quad f'(6) = -\frac{1}{4} + 1 > 0$$

המשך בעמוד הבא ▶▶▶

נחשב את ערכי הפונקציה בקצוות :

$$x = 4.5 \Rightarrow y = \frac{1}{4.5-4} + 4.5 - 4 = 2.5$$

$$x = 8 \Rightarrow y = \frac{1}{8-4} + 8 - 4 = 4.25$$

הfonקציה רציפה בתחוםו, לכן ניתן לקבוע :

מקסימום מקומי : $(5, 2)$, מינימום מקומי ומוחלט : $(4.5, 2.5)$

מקסימום מקומי ומוחלט : $(8, 4.25)$.

(ב) ראו סרטוט משמאלי.

(א) בעצם, כדי למצוא את הפתרונות של

משווה זה, יש למצוא את מספר נקודות החיתוך

של גраф הפונקציה (שشرطנו בסעיף (ב))

$$\frac{1}{x-4} + x - 4 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

$$2.5 < 3\frac{1}{3} < 4.25$$

לכן למשווה זה פתרון אחד (ראו סרטוט משמאלי).

(ד) הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $5 < x < 8$, ככלمر עבור שיעור x גדול יותר מתקיים ערך פונקציה גדול יותר.

$$b > a \Rightarrow f(b) > f(a) \Rightarrow \frac{1}{b-4} + b - 4 > \frac{1}{a-4} + a - 4$$

(ה) (i) $g(x) = f(x) - 2$. כדי לקבל

את גראף הפונקציה $g(x)$,

יש להוריד את גראף הפונקציה $f(x)$

ב- 2 יחידות למטה.

, $2 \leq f(x) \leq 4.25$ מקבלת ערכים בתחום : (ii)

$$2 - 2 \leq g(x) \leq 4.25 - 2$$

$$0 \leq g(x) \leq 2.25$$

$$\cdot \quad 0 < t < 5 , \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-t}} \quad (7)$$

$$\sqrt{x-t} > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \text{עבור } x > t$$

כלומר גраф הפונקציה $f(x)$ אינו חותך את ציר ה- x ומנצט כל מעליו.

$$\int_5^8 f(x) dx = 2 \Rightarrow \int_5^8 \frac{dx}{\sqrt{x-t}} = 2 \Rightarrow 2\sqrt{x-t} \Big|_5^8 = 2 \Rightarrow \text{(א) (i)}$$

$$2(\sqrt{8-t} - \sqrt{5-t}) = 2 \Rightarrow \sqrt{8-t} = 1 + \sqrt{5-t}$$

כיוון שכל אגף של המשוואה הוא חיובי, ניתן להעלות את אגפי המשוואה ברייבוע. נקבל:

$$2\sqrt{5-t} = 2 \Rightarrow \sqrt{5-t} = 1 \Rightarrow 5-t = 1 \Rightarrow t = 4$$

(מתאים לנตอน $5 < t < 8$, כלומר $0 < x < 5$)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}} \quad \text{תחום הגדרה:} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}} \quad (ii)$$

$$\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ \sqrt{x-4} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 4$$

(ב) נסמן את שיעור ה- x של הנקודה ב- a , אז:

$$F = x_A \cdot y_A \Rightarrow F(a) = a \cdot \frac{1}{\sqrt{a-4}} = \frac{a}{\sqrt{a-4}} \quad \text{פונקציית המטריה:}$$

$$F'(a) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{a-4}} \cdot a - \frac{1}{\sqrt{a-4}} \cdot 1}{(a-4)^2} = \frac{2(a-4)-a}{2(a-4)\sqrt{a-4}} = \frac{a-8}{2(a-4)\sqrt{a-4}}$$

$$F'(a) = 0 \Rightarrow a-8=0 \Rightarrow a=8$$

x	$4 < a < 8$	$a = 8$	$a > 8$
$F'(a)$	-	0	+
$F(a)$	↘	min	↗

המשך בעמוד הבא ▶▶▶

$$F'(5) = \frac{5-8}{2(5-4)(+)} < 0 , \quad F'(9) = \frac{9-8}{2(9-4)(+)} > 0$$

$$x_A = 8 \Rightarrow y_A = \frac{1}{\sqrt{8-4}} = \frac{1}{2}$$

. A(8, $\frac{1}{2}$) : **תשובה**

$$g(x) = f'(x) = 12x^2 + 2a x - 6 \Rightarrow g'(x) = 24x + 2a \quad (8)$$

(א) נתון : $g'\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, מכאן :

$$24 \cdot \frac{1}{4} + 2a = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 6x - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \quad (b)$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = 1 , x_2 = -\frac{1}{2}$$

x	$x < -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗	max	↘	min	↗

$$f'(-1) = 12 + 6 - 6 > 0 \quad f'(0) = -6 < 0$$

$$f'(2) = 12 \cdot 4 - 24 - 6 > 0$$

. min : $x = 1$, max : $x = -\frac{1}{2}$: כלומר :

(א) נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של גраф הפונקציה $y = g(x)$ עם ציר ה- y

$$x = 0 \Rightarrow y = 12 \cdot 0 - 6 \cdot 0 - 6 = -6 \Rightarrow B(0, -6)$$

$$m_B = g'(0) = 24 \cdot 0 - 6 = -6$$

משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = g(x)$ בנקודת $B(0, -6)$

$$y - y_B = m_B(x - x_B)$$

$$y + 6 = -6(x - 0) \Rightarrow y = -6x - 6$$

המשך בעמוד הבא

(ד) נמצא את שיעורי הנקודה C , נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x :

$$y = 0 \Rightarrow 0 = -6x - 6 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow C(-1, 0)$$

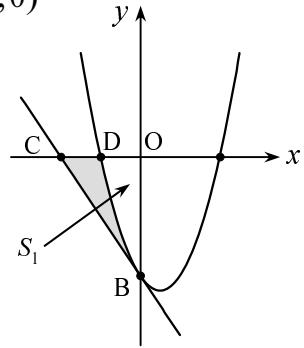
$$y_D = 0 \Rightarrow x_D = -\frac{1}{2} \text{ כmo CN :}$$

$$S_{\text{טפנ}} = S_{\Delta OBC} - S_1$$

$$S_{\Delta OBC} = \frac{OC \cdot OB}{2} = \frac{(x_O - x_C)(y_O - y_B)}{2} = \\ = \frac{1 \cdot 6}{2} = 3 \text{ ייחדות שטח}$$

$$S_1 = - \int_{-0.5}^0 g(x) dx = - \int_{-0.5}^0 f'(x) dx = -f(x) \Big|_{-0.5}^0 = \\ = -[f(0) - f(-\frac{1}{2})] = f(-\frac{1}{2}) - f(0) = \\ = 4 \cdot (-\frac{1}{8}) - 3 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} + b - (0 - 0 - 0 + b) = 1\frac{3}{4} \text{ ייחדות שטח}$$

$$S_{\text{טפנ}} = 3 - 1\frac{3}{4} = 1\frac{1}{4} \text{ ייחדות שטח}$$



(ה) לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון כאשר :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1$$

$$f(-\frac{1}{2}) + f(1) = \frac{3}{4}$$

נתו :

$$4 \cdot (-\frac{1}{8}) - 3 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} + b + 4 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 6 + b = \frac{3}{4}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 3 + b + 4 - 3 - 6 + b = \frac{3}{4}$$

$$-3\frac{1}{4} + 2b = \frac{3}{4} \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

גבוי יקואל

משבצת 

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

❖ לכל הציותות ❖ לכל השאלונים ❖ לכל הרמות