פתרון מבחן מס׳ 36 (ספר מבחנים – שאלון 035804)

(1) (א) נסמן ב- t שעות את משך הנסיעה של שני הרוכבים.

נסמן ב- C את הנקודה אליה הגיע הרוכב הראשון

וב- D את הנקודה אליה הגיע הרוכב השני.

$BC = 4 + AD \quad \Rightarrow \quad 8t = 4 + 6t \quad \Rightarrow \quad t = 2$ שעות

(ב) לפי משפט פיתגורס ב- ΔACD :

$DC^2 = AC^2 + AD^2$

$DC^2 = (AB - BC)^2 + AD^2 = (51 - 8 \cdot 2)^2 + (6 \cdot 2)^2 = 35^2 + 12^2 = 1{,}369$

$DC = \sqrt{1{,}369} = 37$ ק״מ

(ג) לפי משפט פיתגורס ב- ΔABD :

$DB^2 = AD^2 + AB^2$

$DB^2 = 12^2 + 51^2 = 2{,}745 \quad \Rightarrow \quad DB = \sqrt{2{,}745} \approx 52.39$ ק״מ

(ד) המרחק בין הרוכבים t שעות מרגע יציאתם $(0 \le t \le 2)$:

$$S = \sqrt{(51 - 8t)^2 + (6t)^2} = \sqrt{100t^2 - 816t + 2{,}601}$$

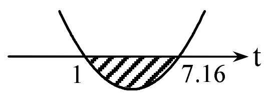
$$\sqrt{1{,}602} \le \sqrt{100t^2 - 816t + 2{,}601} \le \sqrt{1{,}885}$$

$$1{,}602 \le 100t^2 - 816t + 2{,}601 \le 1{,}885$$

$$\begin{cases} ① \; 100t^2 - 816t + 2{,}601 \le 1{,}885 \\ ② \; 100t^2 - 816t + 2{,}601 \ge 1{,}602 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ① \; 100t^2 - 816t + 716 \le 0 \\ ② \; 100t^2 - 816t + 999 \ge 0 \end{cases}$$

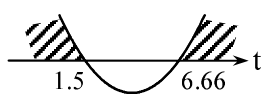
① $25t^2 - 204t + 179 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{204 \pm 154}{50}$

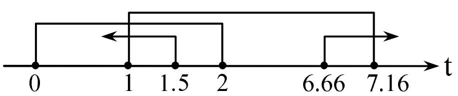
$t_1 = 7.16 \;,\; t_2 = 1$



② $100t^2 - 816t + 999 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{816 \pm 516}{200}$

$t_1 = 6.66 \;,\; t_2 = 1.5$





תשובה: 1.5 שעות $\le t \le 1$ שעה

(2) (א) שטח של משולש שווה-צלעות שווה ל- $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ יחידות שטח = $\frac{a \cdot a \cdot \sin 60^\circ}{2}$

(a – אורך צלע המשולש).

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3} \;\Rightarrow\; a = \sqrt{48} =$ יחידות אורך $4\sqrt{3}$

הצלע OC נמצאת על ציר ה- y , לכן:

$$OC = y_C - y_O = 4\sqrt{3} \;\Rightarrow\; C(0, 4\sqrt{3})$$

לפי משפט פיתגורס, גובה במשולש שווה-צלעות שאורך צלעו a :

$$x_D = h_{\text{משולש}} = \sqrt{a^2 - \left(\tfrac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

הגובה מ- D לצלע OC הוא גם תיכון, לכן:

$$y_D = \tfrac{1}{2} OC \;\Rightarrow\; y_D = 2\sqrt{3} \;\Rightarrow\; D(6, 2\sqrt{3})$$

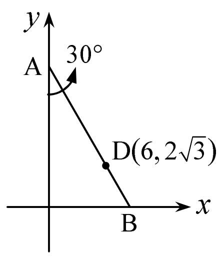
(ב) לפי סימטריה, מרכז המעגל החוסם את ΔOCD נמצא על הגובה מנקודה D לצלע OC , כלומר: $y_{\text{מרכז}} = y_D = 2\sqrt{3}$

רדיוס המעגל החוסם משולש שווה-צלעות (נקודת מפגש התיכונים (האנכים האמצעיים) מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$):

$R = \frac{2}{3} \cdot h_{\text{משולש}} = \frac{2}{3} \cdot 6 =$ יחידות אורך $4 \;\Rightarrow\; x_{\text{מרכז}} = x_D - 4 = 2$

משוואת המעגל החוסם את ΔOCD : $(x-2)^2 + (y - 2\sqrt{3})^2 = 16$

(ג) $(i) + (ii)$ שיפוע הישר AB שווה לטנגנס הזווית שהישר יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , לכן:



$$m_{AB} = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

משוואת AB : $y - y_D = m_{AB}(x - x_D)$

$$y - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}(x - 6) \;\Rightarrow\; y = -\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}$$

מציאת שיעורי הנקודה A :

$$x = 0 \;\Rightarrow\; y = 8\sqrt{3} \;\Rightarrow\; A(0, 8\sqrt{3})$$

מציאת שיעורי הנקודה B :

$$y = 0 \;\Rightarrow\; 0 = -\sqrt{3}x + 8\sqrt{3} \;\Rightarrow\; x = 8 \;\Rightarrow\; B(8,0)$$

המשך בעמוד הבא ⮜⮜⮜

$$m_{OD} = \frac{y_D - y_O}{x_D - x_O} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ , \ m_{AB} = -\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-\sqrt{3}) = -1 \ \Rightarrow \ m_{OD} \cdot m_{AB} = -1 \ \Rightarrow \ OD \perp AB$$

(*iii*) ΔOAB הוא משולש ישר-זווית ($\measuredangle O = 90°$) לכן מרכז המעגל החוסם את המשולש נמצא באמצע היתר (אמצע AB).

נמצא את שיעורי המרכז M בעזרת נוסחת שיעורי אמצע קטע:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+8}{2} = 4 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{8\sqrt{3}+0}{2} = 4\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \ M(4, 4\sqrt{3})$$

נמצא את רדיוס המעגל: $R = \frac{1}{2} AB$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(0-8)^2 + (8\sqrt{3} - 0)^2} = 16$$

$R = \frac{1}{2} \cdot 16 =$ 8 יחידות אורך

משוואת המעגל: $(x-4)^2 + (y - 4\sqrt{3})^2 = 64$

(*iv*) נבדוק האם הנקודה $M(4, 4\sqrt{3})$ נמצאת על המעגל החוסם את ΔOCD:

$$(4-2)^2 + (4\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2 \stackrel{?}{=} 16$$

$$2^2 + (2\sqrt{3})^2 \stackrel{?}{=} 16$$

$$4 + 12 = 16$$

תשובה: הנקודה M נמצאת על המעגל החוסם את ΔOCD .

(3) נסמן:

p_1 – ההסתברות שהתלמיד הראשון יפתור את החידה.

p_2 – ההסתברות שהתלמיד השני יפתור את החידה.

p_3 – ההסתברות שהתלמיד השלישי יפתור את החידה.

(א) לפי נתוני השאלה:

$$\begin{cases} p_1 = 2 \cdot p_2 & ① \\ p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0.16 & ② \\ p_1 \cdot (1-p_2) \cdot p_3 = 0.24 & ③ \end{cases}$$

נחלק משוואה ③ במשוואה ② ונקבל:

$$\frac{p_1 \cdot (1-p_2) \cdot p_3}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3} = \frac{0.24}{0.16}$$

$$\frac{1-p_2}{p_2} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 2-2p_2 = 3p_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = \frac{2}{5} = 0.4$$

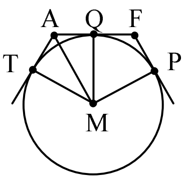
לפי משוואה ①: $p_1 = 2 \cdot 0.4 = 0.8$

לפי משוואה ②: $0.8 \cdot 0.4 \cdot p_3 = 0.16 \quad \Rightarrow \quad p_3 = 0.5$

(ב) $P(\text{רק תלמיד אחד יפתור}) =$

$$= p_1 \cdot (1-p_2) \cdot (1-p_3) + (1-p_1) \cdot p_2 \cdot (1-p_3) +$$
$$+ (1-p_1) \cdot (1-p_2) \cdot p_3 =$$
$$= 0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.5 =$$
$$= 0.24 + 0.04 + 0.06 = 0.34$$

(4) (א) מעגל M חסום בתוך משושה נתון.



זווית משושה משוכלל שווה:

$$\measuredangle A = \frac{180° \, (6-2)}{6} = 120°$$

AM חוצה-זווית $\measuredangle TAQ$ (קטע המחבר נקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל עם מרכז המעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים)

המשך בעמוד הבא ⮜⮜⮜

מכאן: $\measuredangle MAQ = \frac{1}{2}\cdot\measuredangle A = \frac{1}{2}\cdot 120° = 60°$.

ב- ΔAQM: $\tan\measuredangle A = \frac{MQ}{AQ} \Rightarrow AQ = \frac{MQ}{\tan\measuredangle A}$

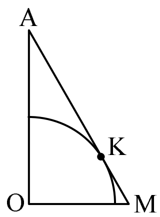
$AQ = \frac{R}{\tan 60°} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$ 3 ס"מ

באופן דומה ב- ΔFQM נקבל: $QF =$ 3 ס"מ

צלע המשושה: $AQ = QF \Rightarrow AF = 2\cdot 3 =$ 6 ס"מ

$AQ = \frac{1}{2}AM$ (במשולש $90°$, $60°$, $30°$ הניצב מול ה- $30°$ שווה למחצית היתר).

$AQ = \frac{1}{2}AF$, לכן $AF = AM$, כלומר אורך צלע המשושה שווה לרדיוס המעגל החוסם את המשושה.



$\measuredangle FAM = 60°$ (ΔAMF הוא משולש שווה-צלעות)

$\Downarrow$

$\measuredangle BAM = 120° - 60° = 60°$ (חיסור זוויות)

ב- ΔOAM: $AM = R =$ 6 ס"מ

$OK \perp AM$ (רדיוס לנקודת השקה מאונך למשיק)

$\cos\measuredangle M = \frac{OM}{AM} \Rightarrow OM = AM\cdot\cos\measuredangle M$

$OM = 6\cdot\cos 60° = 6\cdot\frac{1}{2} =$ 3 ס"מ

ב- ΔOKM: $\sin\measuredangle M = \frac{OK}{OM} \Rightarrow OK = r = OM\cdot\sin\measuredangle M$

$r = 3\cdot\sin 60° = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ס"מ

(ב) מצאנו ש- $OM =$ 3 ס"מ .

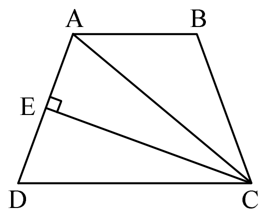
(ג) לפי משפט פיתגורס ב- ΔAQM: $AQ^2 + QM^2 = AM^2$

$3^2 + QM^2 = 6^2 \Rightarrow QM = \sqrt{27} =$ $3\sqrt{3}$ ס"מ

הגובה לצלע OM במשולש OMD שווה ל- QM:

$h_{OM} = QM =$ $3\sqrt{3}$ ס"מ

$S_{\Delta OMD} = \frac{OM\cdot h_{OM}}{2} = \frac{3\cdot 3\sqrt{3}}{2} =$ $4.5\sqrt{3}$ סמ"ר



(5) (א) $AC = DC$ (נתון)

$\Downarrow$

ΔADC הוא משולש שווה-שוקיים

$\Downarrow$

הגובה EC לבסיס AD הוא גם תיכון לבסיס וגם חוצה-זווית הראש,

מכאן: $\measuredangle ACE = \measuredangle DCE$, $DE = EA$

במשולש EDC: $\sin\measuredangle D = \frac{EC}{DC} \Rightarrow DC = \frac{EC}{\sin\measuredangle D} = \frac{b}{\sin\alpha} = AC$

$\measuredangle DAB = \measuredangle ABC = 180° - \alpha$ (סכום זוויות חד-צדדיות בין מקבילים שווה ל- $180°$)

$\measuredangle ACD = 180° - 2\alpha$ (סכום זוויות ב- ΔADC שווה ל- $180°$)

$\measuredangle C = \measuredangle D = \alpha$ (זוויות בסיס בטרפז שווה-שוקיים שוות)

$\measuredangle ACB = \alpha - (180° - 2\alpha) = 3\alpha - 180°$

לפי משפט הסינוסים ב- ΔABC:

$$\frac{AB}{\sin\measuredangle C} = \frac{AC}{\sin\measuredangle B} \Rightarrow AB = \frac{AC \cdot \sin\measuredangle C}{\sin\measuredangle B}$$

$$AB = \frac{\frac{b}{\sin\alpha} \cdot \sin(3\alpha - 180°)}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{b \cdot (-\sin 3\alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\alpha} = -\frac{b\sin 3\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$AB = -\frac{b\sin 3\alpha}{\sin^2\alpha} \ , \ DC = \frac{b}{\sin\alpha}$$

(ב) רדיוס המעגל החוסם את ΔCDE שווה למחצית היתר DC

(כי מרכז המעגל החוסם משולש ישר-זווית נמצא באמצע היתר)

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\alpha}$$

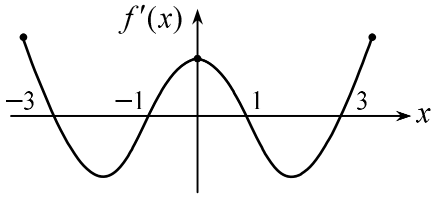
המעגל החוסם את הטרפז $ABCD$ חוסם גם את המשולש ADC.

לפי משפט הסינוסים ב- ΔADC: $\frac{DC}{\sin\measuredangle DAC} = 2R_2$

$$R_2 = \frac{DC}{2\sin\measuredangle DAC} = \frac{b}{2\sin\alpha \cdot \sin\alpha} = \frac{b}{2\sin^2\alpha}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{b}{2\sin\alpha} \cdot \frac{2\sin^2\alpha}{b} = \sin\alpha$$

(6) (א) לפונקציה זוגית $f'(x)$ גרף סימטרי ביחס לציר ה- y , לכן :



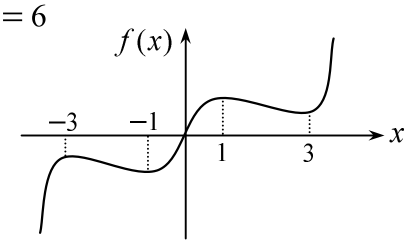
(ב) לפונקציה יש נקודות קיצון כאשר $f'(x)=0$ ומחליפה את סימנה :

$x_{\max}=-3$, $x_{\min}=-1$, $x_{\max}=1$, $x_{\min}=3$

(ג) גרף של פונקציה אי-זוגית $f(x)$ הוא סימטרי ביחס לראשית הצירים,

לכן : $f(-3)_{\max}=-4 \;\Rightarrow\; f(3)_{\min}=-(-4)=4$

$f(-1)_{\min}=-6 \;\Rightarrow\; f(1)_{\max}=-(-6)=6$



(ד) עבור $1<x<3$ גרף הפונקציה $f'(x)$ נמצא מתחת לציר ה- x , לכן :

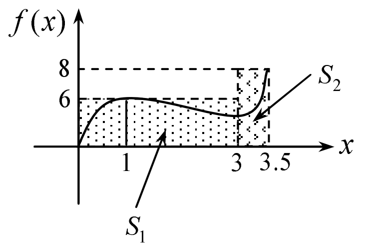
$$S=-\int_1^3 f'(x)\,dx=-f(x)\Big|_1^3=-[f(3)-f(1)]=$$

$$=-(4-6)=2 \text{ יחידות שטח}$$

(ה) $$S_1=\int_0^3 f(x)\,dx<S_{\text{מלבן שמאלי}}=3\cdot 6=18 \text{ יחידות שטח}$$

$$S_2=\int_3^{3.5} f(x)\,dx<S_{\text{מלבן ימני}}=0.5\cdot 8=4 \text{ יחידות שטח}$$

$$S=\int_0^{3.5} f(x)\,dx<18+4=22 \text{ יחידות שטח}$$



(7) (א) נתון: $f'(\mathrm{a})=-3$.

$$f'(x)=\frac{2x\,(x^2-\mathrm{a}x+\mathrm{a})-x^2\,(2x-\mathrm{a})}{(x^2-\mathrm{a}x+\mathrm{a})^2}$$

$$f'(\mathrm{a})=-3 \;\Rightarrow\; \frac{2\mathrm{a}\,(\mathrm{a}^2-\mathrm{a}^2+\mathrm{a})-\mathrm{a}^2\,(2\mathrm{a}-\mathrm{a})}{(\mathrm{a}^2-\mathrm{a}^2+\mathrm{a})^2}=-3$$

$$\frac{2\mathrm{a}^2-\mathrm{a}^3}{\mathrm{a}^2}=-3 \;\Rightarrow\; 2-\mathrm{a}=-3 \;\Rightarrow\; \mathrm{a}=5$$

$$f'(x)=\frac{2x\,(x^2-5x+5)-x^2\,(2x-5)}{(x^2-5x+5)^2}=\frac{-5x^2+10x}{(x^2-5x+5)^2}=\frac{5x\,(2-x)}{(x^2-5x+5)^2}$$

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-5x+5}$$

(ב)

$$x^2-5x+5\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq\frac{5\pm\sqrt{25-20}}{2} \;\Rightarrow\; x\neq\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

(ג)

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{5x\,(2-x)}{(\;)^2}=0 \;\Rightarrow\; 5x(2-x)=0$$

$$x_1=0 \;\Rightarrow\; y_1=0 \;\Rightarrow\; (0,0)$$

$$x_2=2 \;\Rightarrow\; y_2=\frac{4}{4-10+5}=-4 \;\Rightarrow\; (2,-4)$$

x	$x<0$	$x=0$	$0<x<\frac{5-\sqrt5}{2}$	$x=\frac{5-\sqrt5}{2}$	$\frac{5-\sqrt5}{2}<x<2$
f′(x)	−	0	+	נקודת אי-הגדרה	+
f(x)	↘	min	↗		↗

x	$x=2$	$2<x<\frac{5+\sqrt5}{2}$	$x=\frac{5+\sqrt5}{2}$	$x>\frac{5+\sqrt5}{2}$
f′(x)	0	−	נקודת אי-הגדרה	−
f(x)	max	↘		↘

$$f'(-1)=\frac{-5-10}{+}<0 \qquad f'(1)=\frac{-5+10}{+}>0 \qquad f'(1.5)=\frac{-12.25+15}{+}>0$$

$$f(3)=\frac{-45+30}{+}<0 \qquad f'(4)=\frac{-80+40}{+}<0$$

תשובה: $\max(2,-4)$, $\min(0,0)$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

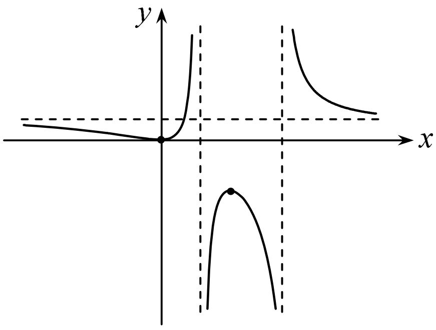
(ד) $x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{0^2}{0^2-5\cdot 0+5}=0 \Rightarrow (0,0)$

$y=0 \Rightarrow 0=\frac{x^2}{x^2-5x+5} \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,0)$

(ה) אסימפטוטות אנכיות: $x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

אסימפטוטה אופקית: $y=1$

(ו) ראו סרטוט משמאל.



(8) נסמן: x ס"מ $= \text{ED}$, ואז: $(x+4)$ ס"מ $= \text{FE}$

$\text{DC}=\text{AD}=\text{AB}=\text{BC}=$ ס"מ $(10-x)$

(א) פונקציית המטרה: $\text{F}=S_{\text{ABCD}}+S_{\Delta\text{EFD}}=\text{DC}^2+\frac{\text{ED}\cdot\text{EF}}{2}$

$\text{F}(x)=(10-x)^2+\frac{x(x+4)}{2}=\frac{3x^2}{2}-18x+100$

$\text{F}'(x)=0 \Rightarrow 3x-18=0 \Rightarrow 3x=18 \Rightarrow x=$ ס"מ 6

$\text{F}''(x)=3>0 \Rightarrow \min$

תשובה: סכום השטחים של המשולש והריבוע יהיה מינימלי

עבור 6 ס"מ $= \text{ED}$.

(ב) 4 ס"מ $= \text{DC}=\text{AD}$, 6 ס"מ $= \text{ED}$, 10 ס"מ $= \text{EF}$.

לפי משפט פיתגורס ב- ΔDEF :

$\text{FD}^2=\text{EF}^2+\text{ED}^2 \Rightarrow \text{FD}^2=10^2+6^2=136$

$\text{FD}=\sqrt{136} \Rightarrow \text{MD}=\frac{1}{2}\cdot\text{FD}=\frac{\sqrt{136}}{2}=$ ס"מ $\sqrt{34}$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(i) ב- ΔEDF :

$$\tan \measuredangle FDE = \frac{FE}{ED} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle FDE = 59.036^\circ$$

$\measuredangle BDC = 45^\circ$ (אלכסון בריבוע חוצה את הזווית $\measuredangle ADC = 90^\circ$)

$$\measuredangle MDO = 180^\circ - 59.036^\circ - 45^\circ = 75.964^\circ$$

(ii) לפי משפט פיתגורס ב- ΔBCD :

$$DB^2 = DC^2 + BC^2 \quad \Rightarrow \quad DB^2 = 4^2 + 4^2 = 32$$

$DB = \sqrt{32}$ ס"מ $\quad \Rightarrow \quad DO = \frac{1}{2} \cdot DB = \frac{\sqrt{32}}{2} = \sqrt{8}$ ס"מ

לפי משפט הקוסינוסים ב- ΔMOD :

$$MO^2 = MD^2 + DO^2 - 2 \cdot MD \cdot DO \cdot \cos \measuredangle MDO$$

$$MO^2 = 34 + 8 - 2 \cdot \sqrt{34} \cdot \sqrt{8} \cdot \cos 75.964^\circ = 34$$

$MO = \sqrt{34}$ ס"מ

(iii)

$$S_{\Delta MDO} = \frac{MD \cdot DO}{2} \cdot \sin \measuredangle MDO =$$

$S_{\Delta MDO} = \frac{\sqrt{34} \cdot \sqrt{8}}{2} \cdot \sin 75.964 = 8$ סמ"ר

גבי יקואל