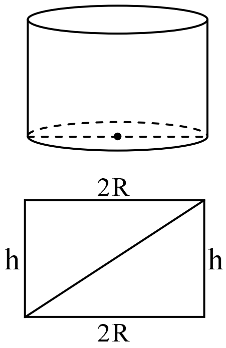
פתרון מבחן מס' 35 (ספר מבחנים – שאלון 035804)



(1) נסמן: R – רדיוס הבסיס, h – גובה הגליל ($2R > h$).

(א)
$$\begin{cases} 2R \cdot h = 35 \\ \sqrt{(2R)^2 + h^2} = \sqrt{74} \quad \text{(לפי משפט פיתגורס)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = \frac{35}{2R} \\ 4R^2 + h^2 = 74 \end{cases}$$

$$4R^2 + \frac{1,225}{4R^2} = 74$$

נסמן: $R^2 = t$:
$$4t + \frac{1,225}{4t} = 74 \quad \Rightarrow \quad 16t^2 - 296t + 1,225 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{296 \pm 96}{32} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 12.25 \ , \ t_2 = 6.25$$

$$R^2 = 12.25 \quad \Rightarrow \quad R = 3.5 \text{ מטר} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{35}{2 \cdot 3.5} = 5 \text{ מטר}$$

$$R^2 = 6.25 \quad \Rightarrow \quad R = 2.5 \text{ מטר} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{35}{2 \cdot 2.5} = 7 \text{ מטר}$$

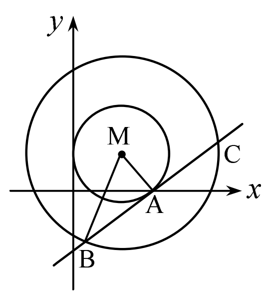
נתון כי $2R > h$, לכן הפתרון $R = 2.5$ מטר נפסל.

תשובה: גובה המיכל הוא 5 מטרים.

(ב)
$$V_{\text{גליל}} = \pi R^2 h = \pi \cdot 3.5^2 \cdot 5 = 61.25\pi \approx 192.42 \text{ מ"ק}$$

(ג)
$$M = \underbrace{2\pi Rh}_{\text{שטח מעטפת}} \cdot 6 + \underbrace{\pi R^2}_{\text{שטח בסיס}} \cdot 4 = 12\pi \cdot 3.5 \cdot 5 + 4\pi \cdot 3.5^2 =$$

$$= 259\pi \approx 813.67 \text{ ש"ח}$$



(2)
$$3x - 4y - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x - 5$$

(א) $M(4,3)$ מרכז המעגל.

רדיוס לנקודת השקה מאונך למשיק, לכן:

$$m_R \cdot m_{\text{משיק}} = -1$$

$$m_{\text{משיק}} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad m_{\text{רדיוס לנק' השקה}} = -\frac{4}{3}$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

משוואת הישר שעליו נמצא הרדיוס לנקודת ההשקה :

$$y-3=-\tfrac{4}{3}(x-4) \ \Rightarrow \ y=-\tfrac{4}{3}x+\tfrac{25}{3}$$

שיעורי נקודת ההשקה :

$$\begin{cases} y=\tfrac{3}{4}x-5 \\ y=-\tfrac{4}{3}x+\tfrac{25}{3} \end{cases} \Rightarrow \ \tfrac{3}{4}x-5=-\tfrac{4}{3}x+\tfrac{25}{3} \quad /\cdot 12$$

$$9x-60=-16x+100 \ \Rightarrow \ 25x=160 \ \Rightarrow \ x=6.4$$

$$x=6.4 \ \Rightarrow \ y=-0.2 \ \Rightarrow \ A(6.4,-0.2)$$

אורך רדיוס המעגל :

$r=MA=\sqrt{(6.4-4)^2+(-0.2-3)^2}=$ 4 יחידות אורך

משוואת המעגל : $(x-4)^2+(y-3)^2=16$

(ב) $\overset{\frown}{BC}=120^\circ \ \Rightarrow \ \measuredangle BMC=120^\circ \ \Rightarrow \ \measuredangle BMA=60^\circ$

$$MA\perp BC \ \Rightarrow \ \measuredangle MBA=180^\circ-90^\circ-60^\circ=30^\circ$$

במשולש ישר-זווית ABM , מול זווית בת 30° נמצא ניצב השווה למחצית היתר, לכן : $MA=\tfrac{1}{2}\cdot MB \ \Rightarrow \ 4=\tfrac{1}{2}\cdot R \ \Rightarrow$

$\Rightarrow R=$ 8 יחידות אורך

משוואת המעגל הגדול : $(x-4)^2+(y-3)^2=64$

(3) נגדיר מאורעות : A – גבר, B – שותה קפה.

נתון : $P(A)=0.75 \ \Rightarrow \ P(\bar{A})=1-P(A)=1-0.75=0.25$

(א) $P(B/A)=\tfrac{2}{3}\cdot P(B/\bar{A}) \ \Rightarrow \ \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{P(\bar{A}\cap B)}{P(\bar{A})}$

$$\frac{4P(A\cap B)}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4P(\bar{A}\cap B)}{1} \ \Rightarrow \ P(A\cap B)=2\cdot P(\bar{A}\cap B)$$

כלומר ההסתברות לבחור גבר השותה קפה גדולה פי 2 מההסתברות לבחור אישה השותה קפה.

(ב) צריך לחשב $P(A/B)$.

$$P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(B)$$

$$2\cdot P(\bar{A}\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(B) \ \Rightarrow \ P(\bar{A}\cap B)=\tfrac{1}{3}\cdot P(B)$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$P(A\cap B)=\frac{2}{3}\cdot P(B)\ \Rightarrow\ \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ P(A/B)=\frac{2}{3}$$

כלומר $\frac{2}{3}$ מאלה ששותים קפה הם גברים.

(ג) נבנה טבלת כמויות:

	B	$\bar{B}$	סה"כ
A	20	16	36
$\bar{A}$	10	2	12
סה"כ	30	18	48

$$N(A)=\frac{3}{4}N=\frac{3}{4}\cdot 48=36$$

$$N(\bar{A})=N-N(A)=$$
$$=48-36=12$$

נתון: $N(\bar{A}\cap\bar{B})=2$, מכאן:

$$N(\bar{A}\cap B)=N(\bar{A})-N(\bar{A}\cap\bar{B})=12-2=10$$

מסעיף (א): $P(A\cap B)=2\cdot P(\bar{A}\cap B)$

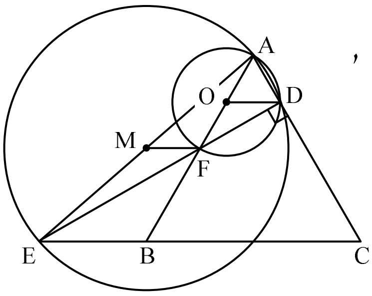
לכן: $N(A\cap B)=2\cdot N(\bar{A}\cap B)=2\cdot 10=20$

$$N(A\cap\bar{B})=N(A)-N(A\cap B)=36-20=16$$

מכאן: $N(\bar{B})=16+2=18$, $N(B)=20+10=30$,

(i) $N(A\cap\bar{B})=16$

(ii) $\frac{N(A\cap\bar{B})}{N(\bar{B})}=\frac{16}{18}=\frac{8}{9}\ \Rightarrow\ \frac{8}{9}\cdot 100\%=\frac{800}{9}\%=88\frac{8}{9}\%$



(4) נתון: $ED\perp AC$, $OD=r$, $BF=2\cdot OD$,
$BC=2\cdot EB$, $AB=BC=AC$.

(א) $\measuredangle EDA=90°$ (נתון)

$AF=2r$ (זווית היקפית ישרה נשענת על הקוטר)

$BF=2\cdot OD=2r$ (נתון, הצבה)

ב- ΔAOD : $OA=OD=r$, $\measuredangle OAD=60°$

$$\Downarrow$$

$\measuredangle ADO=60°$ (במשולש מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות)

$$\Downarrow$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$\measuredangle AOD = 180° - 60° - 60° = 60°$ (סכום זוויות ב- ΔAOD שווה ל- $180°$)

$\measuredangle AOD = \measuredangle ABC = 60°$ (הצבה)

$\Downarrow$

$OD \parallel BC$ (אם זוויות מתאימות בין ישרים שוות, אז הישרים מקבילים)

$\Downarrow$

$OD \parallel EB$

$\Downarrow$

$\Delta FOD \sim \Delta FBE$ לפי משפט ז.ז
($\measuredangle DOF = \measuredangle EBF$ זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים,
$\measuredangle OFD = \measuredangle BFE$ כזוג זוויות קדקודיות)

$\frac{OF}{FB} = \frac{OD}{BE}$, $OD = OF = r$ (צלעות מתאימות במשולשים דומים)

$\Downarrow$

$BE = BF = 2r$ מ.ש.ל. (א)

ב) $OD \parallel BC$ (הוכחנו בסעיף (א))

$\Downarrow$

$\frac{AD}{DC} = \frac{AO}{OB}$ (לפי משפט תאלס)

$\frac{AO}{OB} = \frac{AO}{OF + FB} = \frac{r}{r + 2r} = \frac{1}{3}$

$\Downarrow$

$\frac{AD}{DC} = \frac{1}{3}$ מ.ש.ל. (ב)

ג) $\Delta FBE \sim \Delta FOD$ (הוכחנו בסעיף (א))

$\Downarrow$

$\frac{FE}{FD} = \frac{BF}{OF}$ (צלעות מתאימות במשולשים דומים)

$\Downarrow$

$\frac{FE}{FD} = \frac{2r}{r} = 2$ (הצבה). מ.ש.ל. (ג)

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ד) $EB \parallel OD$ (הוכחנו)

$MA = ME$ (כל הרדיוסים במעגל הגדול שווים)

$BF = FA = 2r$

$\Downarrow$

MF קטע אמצעים ב- ΔAEB

$\Downarrow$

$MF \parallel EB$ (קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע שאינו חוצה)

$MF \parallel EB \ , \ EB \parallel OD$

$\Downarrow$

$OD \parallel MF$ (אם שני ישרים מקבילים לישר שלישי,
אז הם מקבילים ביניהם). מ.ש.ל. (ד) .

(ה) $MF = \frac{1}{2}BE$ (קטע אמצעים ב- ΔABE שווה למחצית הצלע
שאינו חוצה)

$\Downarrow$

$MF = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2} \cdot 2r = r$ מ.ש.ל. (ה) .

(5) (א) $\overset{\frown}{DM} = \overset{\frown}{ME}$ (נתון)

$\Downarrow$

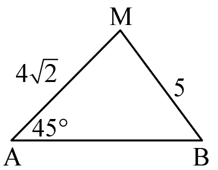
$\measuredangle MAD = \measuredangle MAE$ (זוויות מרכזיות הנשענות על קשתות שוות,
שוות זו לזו)

$\Downarrow$

$\measuredangle MAB + \measuredangle MAD = 90°$ (נתון)

$\Downarrow$

$\measuredangle MAD = \measuredangle MAE = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$



נתבונן ב- ΔAMB :

$AM = AD = R =$ ס"מ $4\sqrt{2}$

לפי משפט הקוסינוסים : $5^2 = AB^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot AB \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos 45°$

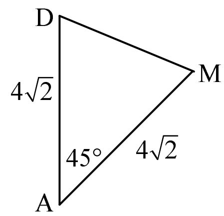
המשך בעמוד הבא >>>

נסמן: $AB = x$ ונקבל:

$$x^2 - 8x + 7 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{8 \pm 6}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = 7 \;,\; x_2 = 1$$

מכיוון ש- $x = AB > AE = 4\sqrt{2}$, הרי ש- $DC = AB = 7$ ס״מ.

(ב) נתבונן ב- ΔADM:



$AD = AM = R = 4\sqrt{2}$ ס״מ

$\measuredangle A = 45°$

$\measuredangle ADM = \measuredangle DMA = \frac{180° - 45°}{2} = 67.5°$

לפי משפט הקוסינוסים:

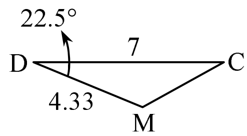
$$DM^2 = AD^2 + AM^2 - 2 \cdot AD \cdot AM \cdot \cos \measuredangle A$$

$$DM^2 = (4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos 45° =$$

$$= 64 - 64 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 18.745$$

$DM = \sqrt{18.745} \approx 4.33$ ס״מ

נתבונן ב- ΔMDC:



$\measuredangle MDC = 90° - \measuredangle ADM = 90° - 67.5° = 22.5°$

לפי משפט הקוסינוסים:

$$MC^2 = DC^2 + DM^2 - 2 \cdot DC \cdot DM \cdot \cos \measuredangle D$$

$$MC^2 = 7^2 + 4.33^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4.33 \cdot \cos 22.5° = 11.74$$

$MC = \sqrt{11.74} \approx 3.43$ ס״מ

(ג) (i) ב- ΔDMC , לפי משפט הקוסינוסים:

$$DC^2 = MD^2 + MC^2 - 2 \cdot MD \cdot MC \cdot \cos \measuredangle DMC$$

$$7^2 = 18.745 + 11.74 - 2 \cdot 4.33 \cdot 3.43 \cdot \cos \measuredangle DMC$$

$$\cos \measuredangle DMC = \frac{18.745 + 11.74 - 7^2}{2 \cdot 4.33 \cdot 3.43} = -0.6233$$

$$\measuredangle DMC = 128.6°$$

(ii) ב- ΔDMC , לפי משפט הסינוסים:

$$\frac{DC}{\sin \measuredangle DMC} = 2R$$

$R = \frac{DC}{2 \sin \measuredangle DMC} = \frac{7}{2 \cdot \sin 128.6°} \approx 4.48$ ס״מ

(6) נסמן ב- x ס"מ את אורך צלע הריבוע DEFG ,

ואז : $(10-x)$ ס"מ $= \mathrm{AE = HF = BI = HB = FI = GC = 2r}$.

(א) נרכיב את פונקציית המטרה : $\mathrm{F} = S_{\mathrm{ABCD}} - S_{\mathrm{DEFG}} - S_{\text{עיגול}}$

$$\mathrm{F}(x) = 10^2 - x^2 - \pi \cdot \left(\frac{10-x}{2}\right)^2 = 100 - x^2 - \frac{\pi}{4}(10-x)^2$$

$$\mathrm{F}'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x - \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot (10-x) \cdot (-1) = 0$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot (10-x) - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 5\pi - \frac{\pi}{2}x - 2x = 0$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}+2\right) = 5\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10\pi}{\pi+4} \approx 4.4 \text{ ס"מ} < 10 \text{ ס"מ}$$

נבדוק שעבור ערך זה, פונקציית המטרה מקבלת ערך מקסימלי :

$$\mathrm{F}''(x) = -2 + \frac{\pi}{2} \cdot (-1) = -2 - \frac{\pi}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \max$$

(ב)

$$\mathrm{F}_{\max} = \mathrm{F}\left(\frac{10\pi}{\pi+4}\right) = 100 - \left(\frac{10\pi}{\pi+4}\right)^2 - \frac{\pi}{4}\left(10 - \frac{10\pi}{\pi+4}\right)^2 =$$

$$= 100 - \frac{100\pi^2}{(\pi+4)^2} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1{,}600}{(\pi+4)^2} =$$

$$= 100 - \frac{100\pi\,(\pi+4)}{(\pi+4)^2} =$$

$$= 100 - \frac{100\pi}{\pi+4} = \frac{400}{\pi+4} \approx 56 \text{ סמ"ר}$$

(ג) נסמן ב- O את מרכז המעגל החסום בריבוע HBIF

וב- M את מרכז המעגל החסום בריבוע DEFG .

MO נמצא על אלכסון הריבוע BD ו- $\mathrm{MF} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{DF}$, $\mathrm{FO} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{FB}$,

ולכן : $\mathrm{MO} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{DF} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{FB}$

$$\mathrm{MO} = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{DF} + \mathrm{FB}) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{BD} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ ס"מ}$$

שימו לב: המרחק MO אינו תלוי בגודל צלע הריבוע DEFG .

(7) (א)

$$x_A = 1 \quad \Rightarrow \quad y_A = 1^2 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad A(1,2)$$

$$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad m_A = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$g'(x) = -\frac{x}{2}$$

$$g'(x_B) = f'(x_A) = 2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{x_B}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad x_B = -4$$

$$y_B = -\frac{1}{4}(-4)^2 - 4 = -8 \quad \Rightarrow \quad B(-4,-8)$$

(ב) (*i*)

$$BC \perp AB \quad \Rightarrow \quad m_{BC} \cdot m_{AB} = -1$$

$$m_{BC} \cdot 2 = -1 \quad \Rightarrow \quad m_{BC} = -\frac{1}{2}$$

משוואת BC :

$$y_B = m_B(x - x_B)$$

$$y + 8 = -\frac{1}{2}(x+4) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{x}{2} - 10$$

(*ii*) הנקודה C היא נקודת החיתוך של BC וגרף הפונקציה $g(x)$,

לכן, למציאת שיעור ה- x של הנקודה C :

$$-\frac{x}{2} - 10 = -\frac{1}{4}x^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 10}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6 \;,\; x_2 = -4$$

הפתרון $x_2 = -4$ מתאים לנקודה B , לכן :

$$x_C = 6 \quad \Rightarrow \quad y_C = -\frac{6}{2} - 10 = -13 \quad \Rightarrow \quad C(6,-13)$$

(*iii*)

$$m_C = g'(6) = -\frac{6}{2} = -3$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-13-2}{6-1} = \frac{-15}{5} = -3$$

$m_C = m_{AC}$, כלומר המשיק לפרבולה בנקודה C מתלכד עם

הישר AC , כלומר עובר בנקודה A .

(*iv*) ΔABC הוא משולש ישר-זווית, לכן :

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2}$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(1+4)^2 + (2+8)^2} =$$

$$= \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$ יחידות אורך

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{(-4-6)^2+(-8+13)^2}=$$

$=\sqrt{125}=$ יחידות אורך $5\sqrt{5}$

$S_{\Delta ABC}=\frac{5\sqrt{5}\cdot 5\sqrt{5}}{2}=\frac{125}{2}=$ יחידות שטח 62.5

(ע) משוואת הישר BC: $y=-\frac{x}{2}-10$

$$S_1=\int_{-4}^{6}\left[-\tfrac{1}{4}x^2-4-\left(-\tfrac{x}{2}-10\right)\right]dx=$$

$$=\int_{-4}^{6}\left(-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+6\right)dx=\left(-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{4}+6x\right)\Big|_{-4}^{6}=$$

$$=-\frac{216}{12}+\frac{36}{4}+36-\left(-\frac{-64}{12}+\frac{16}{4}-24\right)=$$

$$=-18+9+36-\left(\frac{16}{3}+4-24\right)=$$

$=27-\frac{16}{3}+20=$ יחידות שטח $41\frac{2}{3}$

$S_2=S_{\Delta ABC}-S_1=62\frac{1}{2}-41\frac{2}{3}=$ יחידות שטח $20\frac{5}{6}$

$$2\cdot 20\frac{5}{6}=41\frac{2}{3}\quad\Rightarrow\quad S_1=2\cdot S_2$$

(8) $f(x)=\frac{3x-\sqrt{x-1}}{x}=3-\frac{\sqrt{x-1}}{x}$

(א) (i) תחום הגדרה:

$$\begin{cases}x\neq 0\\ x-1\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\geq 1\end{cases}\Rightarrow x\geq 1$$

(ii) + (iii)

$f(1)=3-\frac{\sqrt{0}}{1}=3\Rightarrow(1,3)$ נקודת קצה

$$f'(x)=0\Rightarrow\left(3-\frac{\sqrt{x-1}}{x}\right)'=0$$

$$-\frac{\frac{x}{2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}}{x^2}=0\Rightarrow\frac{x}{2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}=0\quad /\cdot 2\sqrt{x-1}$$

$$x-2(x-1)=0\Rightarrow x=2\Rightarrow y=3-\frac{\sqrt{2-1}}{2}=2.5\Rightarrow(2,2.5)$$

המשך בעמוד הבא ▸▸▸

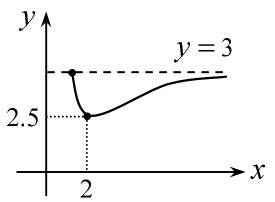
x	$1 \le x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
f'(x)	−	0	+
f(x)	↘	min	↗

$$f'(1.5)=\frac{-\frac{1.5}{2\sqrt{0.5}}+\sqrt{0.5}}{+}<0 \quad , \quad f'(5)=\frac{-\frac{5}{2\cdot 2}+2}{+}>0$$

כלומר: $\max(1,3)$, $\min(2,2.5)$

הפונקציה עולה עבור $x>2$, הפונקציה יורדת עבור $1\le x<2$.

(ב) ראו סרטוט משמאל.



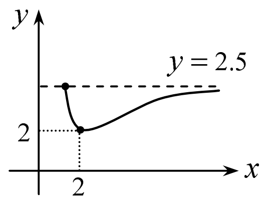
(ג) (*i*) $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$,

כלומר כדי לקבל את הגרף של $g(x)$,

יש להוריד את הגרף של $f(x)$

ב- $\frac{1}{2}$ יחידה למטה.

ראו סרטוט משמאל.



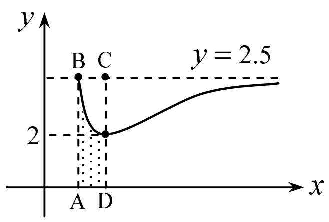
(*ii*) $\max(1,2.5)$, $\min(2,2)$

(*iii*) $\int_1^2 g(x)\,dx$ הוא השטח המנוקד

בסרטוט למטה. שטח זה קטן משטח מלבן ABCD , לכן:

$$\int_1^2 g(x)\,dx < \mathrm{BC}\cdot\mathrm{AB}=(x_{\mathrm{C}}-x_{\mathrm{B}})\cdot(y_{\mathrm{C}}-y_{\mathrm{A}})=$$

$=(2-1)\cdot(2.5-0)=1\cdot 2.5=$ 2.5 יחידות שטח



גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות