

פתרון מבחן מס' 20 (ספר מבחנים – שאלון 035804)

(1) נסמן ב- x קמ"ש את המהירות של רכבת א',

וב- y קמ"ש את המהירות של רכבת ב'.

מכאן, $\frac{900}{x}$ שעות יהיה זמן הנסיעה של רכבת א',

ו- $\frac{900}{y}$ שעות יהיה זמן הנסיעה של רכבת ב'.

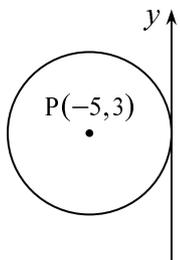
על סמך נתוני השאלה, אפשר להרכיב את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{900}{y} - \frac{900}{x} = 2.5 \\ \frac{180}{x} = \frac{160}{y} \Rightarrow y = \frac{8}{9}x \end{cases}$$

$$\frac{900 \cdot 9}{8x} - \frac{900}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1,012.5}{x} - \frac{900}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{112.5}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 45$$

$$y = \frac{8}{9} \cdot 45 = 40$$

תשובה: מהירויות הרכבות הן 45 קמ"ש ו- 40 קמ"ש.



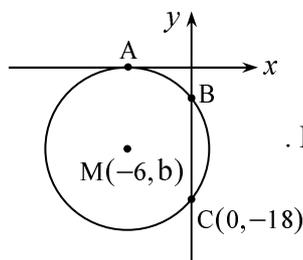
$$R = |x_p| = |-5| = 5 \quad \text{(א) (2)}$$

$$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 25 \quad \text{משוואת המעגל:}$$

(ב) מרחק מרכז המעגל מציר ה- x

שווה ל- $R = 5 > |y_p| = 3$, לכן המעגל חותך את

ציר ה- x בשתי נקודות שונות, כלומר אינו משיק לציר ה- x .



(ג) האנך מנקודה M (מרכז המעגל) לציר ה- y

(המיתר BC) חוצה את המיתר BC,

לכן הנקודה $(0, b)$ היא נקודת אמצע הקטע BC.

נמצא את ערכו של b .

$$R = |y_M| = |b| \quad \text{רדיוס המעגל:}$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$MC = R \Rightarrow MC^2 = R^2 \Rightarrow (0 + 6)^2 + (-18 - b)^2 = |b|^2$$

$$36 + b^2 + 36b + 324 = b^2 \Rightarrow 36b = -360 \Rightarrow b = -10 \Rightarrow R = 10$$

לכן $(0, -10)$ היא נקודת אמצע הקטע BC : $B(0, x_B)$, $C(0, -18)$

$$-10 = \frac{y_B - 18}{2} \Rightarrow y_B = -2$$

לפי נוסחת שיעורי נקודת אמצע קטע :

$$(x + 6)^2 + (y + 10)^2 = 100$$

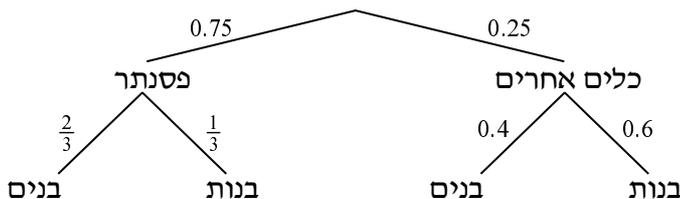
משוואת המעגל M :

$$S_{MBC} = \frac{BC \cdot h_{BC}}{2} = \frac{(y_B - y_C)(x_C - x_M)}{2} =$$

$$= \frac{(-2 + 18)(0 + 6)}{2} = 48$$

יחידות שטח

(3) נסרטט דיאגרמת עץ :



$$P(\text{בן שמנגן בפסנתר}) = 0.75 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \quad (\text{א})$$

$$P(\text{לפחות 4 בנים שמנגנים בפסנתר}) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) =$$

$$= \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 =$$

$$= 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = (15 + 6 + 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$

$$P(\text{בן / מנגן בפסנתר}) = \frac{P(\text{בן} \cap \text{מנגן בפסנתר})}{P(\text{בן})} = \frac{0.75 \cdot \frac{2}{3}}{0.75 \cdot \frac{2}{3} + 0.25 \cdot 0.4} = \quad (\text{ב})$$

$$= \frac{0.5}{0.5 + 0.1} = \frac{5}{6}$$

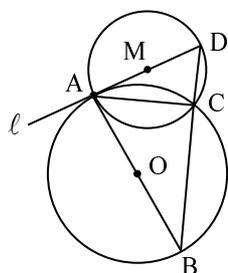
$$P(\text{לפחות 4 בנים שמנגנים בפסנתר}) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) =$$

$$= \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \left(\frac{1}{6}\right)^1 + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 =$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{15}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + \frac{25}{36}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{70}{36} = 0.9377$$

המשך בעמוד הבא <<<

$$\begin{aligned}
 P(\text{לפחות 2 מתוך ה-3 מנגנים בפסנתר} / \text{בדיוק 2 מנגנים בפסנתר}) &= \quad (ג) \\
 &= \frac{P_3(2)}{P_3(2) + P_3(3)} = \frac{3 \cdot (0.75)^2 \cdot (0.25)}{3 \cdot (0.75)^2 \cdot (0.25) + (0.75)^3} = \\
 &= \frac{0.421875}{0.421875 + 0.421875} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



(4) (א) נחבר את הנקודות C ו-D , ואת הנקודות C ו-B .

$\angle ACD = 90^\circ$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר AD

היא זווית ישרה)

$\angle ACB = 90^\circ$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר AB

היא זווית ישרה)

(חיבור זוויות) $\angle DCB = \angle ACD + \angle ACB$

(הצבה) $\angle DCB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

↓

$\angle DCB$ זווית שטוחה, לכן הנקודות B , C ו-D נמצאות על ישר אחד.

(ב) $OA \perp AD$ (רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה)

↓

$\angle BAD = 90^\circ$

לפי משפט פיתגורס ב- $\triangle ABD$:

$$(2R)^2 + (2r)^2 = DB^2 \Rightarrow DB = \sqrt{4R^2 + 4r^2} = 2\sqrt{R^2 + r^2}$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{AB \cdot AD}{2} = \frac{DB \cdot AC}{2}$$

$$AB \cdot AD = DB \cdot AC$$

$$AC = \frac{AB \cdot AD}{DB} = \frac{2R \cdot 2r}{2\sqrt{R^2 + r^2}} = \frac{2Rr}{\sqrt{R^2 + r^2}}$$

$$\angle AEB = 90^\circ \quad (\text{א}) \quad (5) \quad (\text{זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה})$$

$$\angle EAB = 90^\circ - \beta \quad : \Delta ABE \text{ ב-}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{AB} \Rightarrow AB = \frac{b}{\cos \beta}, \quad \tan \beta = \frac{AE}{b} \Rightarrow AE = b \tan \beta$$

$$\angle DEA = 90^\circ \quad (\text{זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה})$$

$$\angle DAE = \angle DAB - \angle EAB = 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta \quad : \Delta ADE \text{ ב-}$$

$$\cos \beta = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AD = \frac{AE}{\cos \beta} = \frac{b \tan \beta}{\cos \beta} = \frac{b \sin \beta}{\cos^2 \beta}$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = \frac{b}{\cos \beta} \cdot \frac{b \sin \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{b^2 \sin \beta}{\cos^3 \beta}$$

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \left(\frac{b}{\cos \beta} + \frac{b \sin \beta}{\cos^2 \beta} \right) = \frac{2b}{\cos \beta} (1 + \tan \beta)$$

$$R_1 = \frac{AB}{2} = \frac{b}{2 \cos \beta} \quad : \text{רדיוס של חצי עיגול } O_1 \quad (\text{ב})$$

$$R_2 = \frac{AD}{2} = \frac{b \sin \beta}{2 \cos^2 \beta} \quad : \text{רדיוס של חצי עיגול } O_2$$

היחס בין השטחים של חצאי העיגולים O_1 ו- O_2 הוא:

$$\frac{\frac{1}{2} \pi R_1^2}{\frac{1}{2} \pi R_2^2} = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 = \left(\frac{b}{2 \cos \beta} \cdot \frac{2 \cos^2 \beta}{b \sin \beta} \right)^2 = \left(\frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right)^2$$

עבור $\beta = 30^\circ$, היחס שווה ל:

$$k = \left(\frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} \right)^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 6 \quad (i) \quad (\text{א}) \quad (6)$$

(נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$).

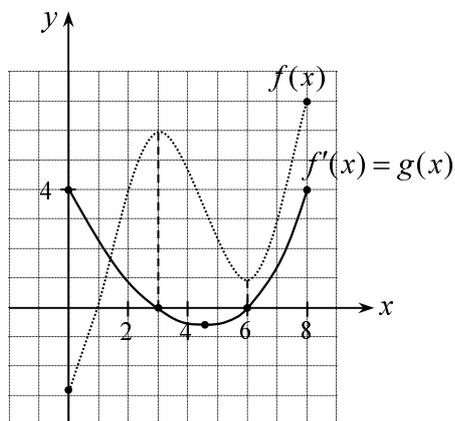
$$g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ יורדת} \quad (ii)$$

כלומר עבור: $3 < x < 6$

$$g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ עולה} \quad (iii)$$

כלומר עבור: $0 \leq x < 3, 6 < x \leq 8$

המשך בעמוד הבא <<<



(ב) ראו סרטוט משמאל.

(ג) $1 < x < 3, 6 < x \leq 8$

(ד)
$$\begin{cases} f(x_1) > 0 \\ f(x_1) \cdot g(x_2) = 0 \end{cases}$$

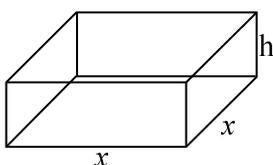
\Downarrow

$$\begin{cases} f(x_1) > 0 \\ g(x_2) < 0 \end{cases}$$

\Downarrow

$1 < x_1 \leq 8$

$3 < x_2 < 6$



(7) נסמן ב- x דצי"מ את אורך צלע בסיס התיבה

וב- h דצי"מ את גובה התיבה.

לפי הנתון: $108 = V = x^2 h$ דצי"ק, לכן:

$h = \frac{V}{x^2} = \frac{108}{x^2}$ דצי"מ

פונקציית המטרה: $P = x^2 + 4xh$. נציב את הביטוי שמצאנו עבור h ונקבל:

$P(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}$

$P'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{432}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6$ דצי"מ

$P''(x) = 2 + \frac{864}{x^3}$, $P''(6) = 2 + \frac{864}{6^3} > 0 \Rightarrow \min$

עבור אורך צלע בסיס של 6 דצי"מ, שטח הפח יהיה מינימלי עבור

תיבה בנפח 108 דצי"ק. שטח הפנים המינימלי הוא:

$S_{\min} = P(6) = 6^2 + \frac{432}{6} = 36 + 72 = 108$ דצמ"ר

(8) (א) נמצא את שיעורי נקודת ההשקה D

לפי משוואת המשיק:

$$y(9) = \frac{1}{6} - \frac{9}{162} = \frac{1}{9} \Rightarrow D(9, \frac{1}{9})$$

$$f(9) = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{b\sqrt{9}} + a = \frac{1}{9} \quad \text{מכאן:}$$

$$a + \frac{1}{3b} = \frac{1}{9} \quad \text{כלומר:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{b} (x^{-\frac{1}{2}})' = \frac{1}{b} \cdot \left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)$$

נגזרת הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=9$ שווה לשיפוע

של הישר המשיק לה, כלומר:

$$f'(9) = -\frac{1}{162} \Rightarrow -\frac{1}{2 \cdot 9 \sqrt{9b}} = -\frac{1}{162} \Rightarrow \frac{1}{54b} = \frac{1}{162} \Rightarrow b = 3$$

$$a + \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9} \Rightarrow a = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}} \quad \text{(ב)}$$

$$y_A = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{6} - \frac{x_A}{162} \Rightarrow x_A = \frac{162}{6} = 27 \quad (i)$$

כלומר: $A(27, 0)$.

$$S = \int_9^{27} \frac{dx}{3\sqrt{x}} - S_{\triangle ABD} = \frac{2\sqrt{x}}{3} \Big|_9^{27} - \frac{AB \cdot BD}{2} = \quad (ii)$$

$$= \frac{2}{3} (\sqrt{27} - \sqrt{9}) - \frac{(27-9) \cdot \frac{1}{9}}{2} = \frac{2}{3} (3\sqrt{3} - 3) - 1 =$$

$$= (2\sqrt{3} - 3) \approx 0.464 \quad \text{יחידות שטח}$$

גבי יקואל

מ ש ב צ ת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

לכל הכיתות ♦ לכל השאלונים ♦ לכל הרמות