פתרון מבחן מס' 8 (ספר מבחנים – שאלון 035807)

(1) נסמן ב- O את ראשית הצירים.

לפי סימטריה, נקבל: $AB = 2 \cdot CD \;\Rightarrow\; OB = 2 \cdot OD$

נסמן: $x_D = t$, ואז: $y_D = 1.5t$, $x_B = 2t$, $y_B = 3t$.

הנקודה B נמצאת על המעגל, לכן: $(2t)^2 + (3t)^2 = 52$

$13t^2 = 52 \;\Rightarrow\; t^2 = 4 \;\Rightarrow\; t = \pm 2$

ידוע כי $x_D = t > 0$, לכן $t = 2$. מכאן: $x_D = 2 \,,\, y_D = 3 \;\Rightarrow\; D(2,3)$

משוואת אליפסה: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = R^2 = 52 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

הנקודה D נמצאת על האליפסה, לכן שיעוריה מקיימים

את משוואת האליפסה: $\frac{2^2}{52} + \frac{3^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; b = \frac{39}{4}$

כלומר משוואת האליפסה: $\frac{x^2}{52} + \frac{4y^2}{39} = 1$

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035807

(2) (א) $\overrightarrow{AB} = B - A = (4m - m, 3m + 1 - m + 2, 2m + 1 + 1) =$

$= (3m, 2m + 3, 2m + 2)$

וקטור נורמל למישור π הוא $\underline{h} = (1,2,-3)$.

אם $\overrightarrow{AB} \parallel \pi$, אז: $\overrightarrow{AB} \perp \underline{h} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \underline{h} = 0$

$3m + 2(2m + 3) - 3(2m + 2) = 0$

$3m + 4m + 6 - 6m - 6 = 0 \Rightarrow m = 0$

נבדוק האם במקרה זה, הישר AB אינו מוכל במישור π :

$A(0,-2,-1) \Rightarrow 0 + 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) + 6 \stackrel{?}{=} 0$

$5 \neq 0$, לכן הנקודה A אינה נמצאת במישור והישר AB

מקביל למישור π .

(ב) $\underline{s} \stackrel{?}{\perp} \underline{h} \Rightarrow \underline{s} \cdot \underline{h} = (4,1,2) \cdot (1,2,-3) = 4 + 2 - 6 = 0$

המכפלה הסקלרית שווה ל- 0 , כלומר $\underline{s} \perp \underline{h}$,

מכאן, הישר ℓ מקביל למישור π או מוכל בתוכו.

$(0,0,2) \Rightarrow 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 6 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

כלומר נקודה אחת של הישר ℓ נמצאת במישור, ולכן כל הישר

נמצא במישור π .

(ג) $(0,3,2) \neq \alpha(4,1,2) \Rightarrow$ AB אינו מקביל לישר ℓ

אזי, לפי הגדרה, המרחק בין ישרים מצטלבים AB ו- ℓ הוא המרחק

בין הישר AB למישור המקביל ל- AB ומכיל את הישר ℓ ,

כלומר המרחק בין הישר AB למישור π . מרחק זה שווה למרחק

בין הנקודה $A(0,-2,-1)$ למישור AB , לכן:

$$d = \frac{|0 + 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) + 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}} \text{ יחידות אורך}$$

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035807

(3) (א) נסמן: $z=x+iy\ ,\ \bar{z}=x-iy\ ,\ |z|=\sqrt{x^2+y^2}$

ואז: $(x-iy)i+(x-iy)^2+(x^2+y^2)+x+\cancel{iy}+x-\cancel{iy}=0$

$$xi+y+x^2-\cancel{y^2}-2xyi+x^2+\cancel{y^2}+2x=0$$

$$2x^2+2x+y+i(x-2xy)=0$$

$$\begin{cases}\text{Re} & 2x^2+2x+y=0\\ \text{Im} & x-2xy=0 \ \Rightarrow\ x(1-2y)=0\end{cases}$$

$$x=0 \ \Rightarrow\ 0+0+y=0 \ \Rightarrow\ y=0 \ \Rightarrow\ z_1=0$$

$$y=\tfrac{1}{2} \ \Rightarrow\ 2x^2+2x+\tfrac{1}{2}=0 \ \Rightarrow\ 4x^2+4x+1=0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (2x+1)^2=0 \ \Rightarrow\ x=-\tfrac{1}{2} \ \Rightarrow\ z_2=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i$$

(ב) $a_n=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\ ,\ d=1+\tfrac{1}{16}i\ ,\ a_1=\text{Re}=?$

לפי נוסחת איבר כללי בסדרה חשבונית: $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$

$$-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i=a_1+\left(1+\tfrac{1}{16}i\right)(n-1)$$

$$-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i=a_1+n-1+\tfrac{1}{16}in-\tfrac{1}{16}i$$

$$\begin{cases}\text{Re} & -\tfrac{1}{2}=a_1+n-1\\ \text{Im} & \tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{16}n-\tfrac{1}{16}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad 8=n-1 \ \Rightarrow\ n=9$$

$$-\tfrac{1}{2}=a_1+9-1 \ \Rightarrow\ a_1=-8\tfrac{1}{2}$$

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035807

(4) (א) (*i*) תחום הגדרה: $\mathrm{a}-e^x\neq 0 \;\Rightarrow\; e^x\neq \mathrm{a} \;\Rightarrow\; x\neq \ln \mathrm{a}$

(*ii*) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$$x=0 \;\Rightarrow\; y=\frac{e^0}{\mathrm{a}-e^0}=\frac{1}{\mathrm{a}-1} \;\Rightarrow\; \left(0,\frac{1}{\mathrm{a}-1}\right)$$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$y=0 \;\Rightarrow\; \frac{e^x}{\mathrm{a}-e^x}=0 \;\Rightarrow\; e^x=0$$

$e^x>0$ לכל x , לכן אין פתרון למשוואה, כלומר גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x .

(*iii*) משוואות אסימפטוטות:

אסימפטוטה אנכית: $\lim\limits_{x\to \ln \mathrm{a}} \frac{e^x}{\mathrm{a}-e^x}=\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}-\mathrm{a}}\right)=\pm\infty \;\Rightarrow\; x=\ln \mathrm{a}$

אסימפטוטה אופקית ימנית: $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x}{\mathrm{a}-e^x}=-1 \;\Rightarrow\; y=-1$

אסימפטוטה אופקית שמאלית:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{\mathrm{a}-e^x}=\left(\frac{0}{\mathrm{a}-0}\right)=0 \;\Rightarrow\; y=0$$

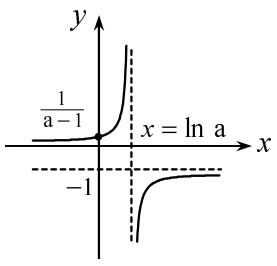
(ב) $$f'(x)=\frac{e^x(\mathrm{a}-e^x)+e^x\cdot e^x}{(\mathrm{a}-e^x)^2}=\frac{e^x(\mathrm{a}-e^x+e^x)}{(\mathrm{a}-e^x)^2}=\frac{\mathrm{a}e^x}{(\mathrm{a}-e^x)^2}$$

$\mathrm{a}>0$ לפי הנתון, $e^x>0$ לכל x , $(\mathrm{a}-e^x)^2>0$ לכל x

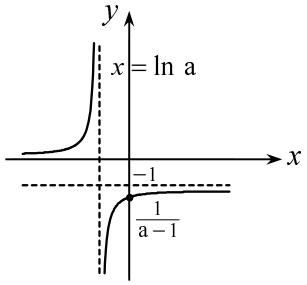
חוץ מאשר $x=\ln \mathrm{a}$, כלומר לכל x בתחום ההגדרה.

מכאן ש- $f'(x)>0$ לכל x בתחום ההגדרה, כלומר הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

(ג) (*i*) סקיצה עבור: $\mathrm{a}>1$



(*ii*) סקיצה עבור: $0<\mathrm{a}<1$



© כל הזכויות שמורות להוצאת שבתי (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035807

(5) (א)

$$\sqrt{x^2}=|x| \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2+1}>|x|$$

$$x\geq 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2+1}+x>0$$

$$x<0 \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2+1}+x>|x|+x=-x+x=0$$

כלומר הפונקציה $u(x)$ חיובית לכל x.

(ב) (*i*) תחום הגדרה:

$$x+\sqrt{x^2+1}>0 \;\Rightarrow\; u(x)>0$$

וזאת הוכחנו בסעיף (א).

(*ii*)

$$f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(ג)

$$\int_{-a}^{a}\frac{dx}{2\sqrt{x^2+1}}=\ln 5 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_{-a}^{a}=\ln 5$$

$$\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)-\ln\left(-a+\sqrt{a^2+1}\right)=2\ln 5$$

$$\ln\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{-a+\sqrt{a^2+1}}=\ln 25$$

$$\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{-a+\sqrt{a^2+1}}=25 \;\Rightarrow\; a+\sqrt{a^2+1}=25\sqrt{a^2+1}-25a$$

$$26a=24\sqrt{a^2+1} \;\Rightarrow\; 13a=12\sqrt{a^2+1} \quad /\cdot(\,)^2$$

$$169a^2=144(a^2+1)$$

$$169a^2=144a^2+144$$

$$25a^2=144 \;\Rightarrow\; a^2=\frac{144}{25} \;\Rightarrow\; a=\pm 2.4$$

$a>0$, לכן: $a=2.4$.

© כל הזכויות שמורות להוצאת מ ש ב צ ת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035807

גבי יקואל



www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◊ לכל הכיתות ◊ לכל השאלונים ◊ לכל הרמות