פתרון מבחן מס' 7 (ספר מבחנים – שאלון 035807)

(1) (א)

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{8-5}{7-3}=\frac{3}{4}$$

משוואת AB:

$$y-5=\frac{3}{4}(x-3) \Rightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{11}{4} \quad /\cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-4y+11=0$$

$$AB=\sqrt{(7-3)^2+(8-5)^2}=\sqrt{16+9}=5 \text{ יחידות אורך}$$

$$S_{ABCD}=AB\cdot h \Rightarrow 15=5\cdot h \Rightarrow h=3$$

גובה המקבילית הוא המרחק בין זוג הצלעות המקבילות AB ו- DC,

ולכן גם המרחק בין $A(3,5)$ לצלע DC.

משוואת DC: $3x-4y+c=0$

לכן: $d=3=\frac{|3\cdot 3-4\cdot 5+c|}{\sqrt{3^2+4^2}} \Rightarrow 3=\frac{|c-11|}{5} \Rightarrow |c-11|=15$

$$c-11=15 \Rightarrow c_1=26$$

$$c-11=-15 \Rightarrow c_2=-4$$

הפתרון $c_1=26$ נפסל כי הישר $3x-4y+26=0$ נמצא מעל

הישר $3x-4y+11=0$. לכן, משוואת DC: $3x-4y-4=0$

(ב) מרחקו של מרכז המעגל M מציר ה- y שווה לרדיוס, לכן:

$$x_M=R=6$$

נסמן: $y_M=t$, $t<0$. מרחק הנקודה $M(6,t)$ מהמשיק DC

שווה לרדיוס המעגל, $d_M=6$.

$$6=\frac{|3\cdot 6-4t-4|}{\sqrt{3^2+4^2}} \Rightarrow 6=\frac{|14-4t|}{5} \Rightarrow |14-4t|=30$$

$$14-4t=30 \Rightarrow t_1=-4 \Rightarrow M(6,-4)$$

$$14-4t=-30 \Rightarrow t_2=11$$

הפתרון $t_2=11$ נפסל כי $t<0$.

שיעורי נקודת ההשקה של המעגל עם ציר ה- y הם $(0,-4)$.

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035807

(2) (א) נסמן: $\overrightarrow{EA}=\underline{a}$, $\overrightarrow{EC}=\underline{b}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}=\underline{x}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{y}$.

ניתן לרשום: $\overrightarrow{ED}=\underline{a}-\underline{x}$, $\overrightarrow{EB}=\underline{b}+\underline{x}$

נתון: $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{EC} \Rightarrow -\underline{a}\cdot\underline{b}=0 \Rightarrow \underline{a}\cdot\underline{b}=0$

אז: $\overrightarrow{ED}\perp\overrightarrow{EB} \Rightarrow \overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EB}=0 \Rightarrow (\underline{a}-\underline{x})(\underline{b}+\underline{x})=0$

$\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{x}-\underline{b}\cdot\underline{x}-\underline{x}\cdot\underline{x}=0$

מכיוון ש- $\underline{a}\cdot\underline{b}=0$ נקבל: $\underline{x}(-\underline{b}-\underline{x}+\underline{a})=0$

$\overrightarrow{EB}=\underline{b}+\underline{x}=\underline{a}+\underline{y} \Rightarrow \underline{x}=\underline{a}+\underline{y}-\underline{b} \quad (*)$

נקבל: $\underline{x}(-\underline{b}-\underline{a}-\underline{y}+\underline{b}+\underline{a})=0$

$-\underline{x}\cdot\underline{y}=0 \Rightarrow \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB} \Rightarrow DA\perp AB$

מקבילית בעלת זווית ישרה היא מלבן, כלומר ABCD מלבן.

(ב) נתון: ABCD הוא מלבן, מכאן: $\underline{x}\cdot\underline{y}=0$.

צ"ל: $\overrightarrow{ED}\perp\overrightarrow{EB} \Rightarrow (\underline{a}-\underline{x})(\underline{b}+\underline{x})=0$

ניעזר ב- $(*)$ ונקבל: $(\underline{a}-\underline{x})(\underline{b}+\underline{x})=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{x}-\underline{b}\cdot\underline{x}-\underline{x}\cdot\underline{x}=$

$=\underline{x}\cdot(\underline{a}-\underline{b}-\underline{x})=\underline{x}\cdot(\underline{a}-\underline{b}-\underline{a}-\underline{y}+\underline{b})=$

$=-\underline{x}\cdot\underline{y}=0 \Rightarrow \overrightarrow{ED}\perp\overrightarrow{EB}$

(3) (א) $\left|i-3x-3iy-(x-iy)\right|=\left|x-iy-(x+iy)-i\right|$

$\left|-4x+i(1-2y)\right|=\left|i(-2y-1)\right|$

$\sqrt{16x^2+(1-2y)^2}=\sqrt{(2y+1)^2}$

$16x^2+1-4y+4y^2=4y^2+4y+1 \Rightarrow 16x^2=8y \Rightarrow y=2x^2$

משוואת המקום הגיאומטרי: $y=2x^2$, כלומר פרבולה המשיקה

לציר ה- x בראשית הצירים $(0,0)$, לכן משוואת המשיק לפרבולה

בנקודה $x=0$ היא $y=0$.

המשך בעמוד הבא ‹‹‹

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון **035807**

(ב) $\left|1+\frac{1}{z}\right|=\sqrt{0.8}$ (i)

נכתוב את z בהצגה קוטבית:

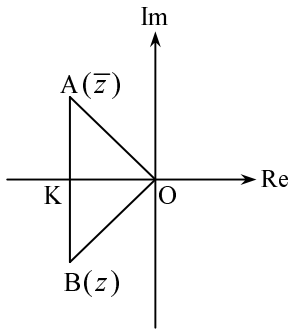
z נמצא ברביע השלישי) $z=\mathrm{r}\operatorname{cis}\theta\ ,\ \mathrm{r}=1\ ,\ 180°<\theta<270°$

$$\left|1+\frac{1}{z}\right|=\left|1+\frac{1}{\mathrm{r}\operatorname{cis}\theta}\right|=\left|1+\operatorname{cis}(-\theta)\right|=\left|(1+\cos\theta)-i\sin\theta\right|=$$

$$=\sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\sqrt{2+2\cos\theta}$$

$$\sqrt{2+2\cos\theta}=\sqrt{0.8}\ \Rightarrow\ 2+2\cos\theta=0.8$$

$$\cos\theta=-0.6\ \Rightarrow\ \theta=-126.87°+360°=233.13°$$



$$\arg z=233.13°$$

$$\arg\overline{z}=-233.13°+360°=126.87°$$

$$\measuredangle\mathrm{AOK}=180°-126.87°=53.13°$$

$$\measuredangle\mathrm{KOB}=\measuredangle\mathrm{AOK}=53.13°$$

$$\measuredangle\mathrm{AOB}=2\cdot53.13°=106.26°$$

$$\measuredangle\mathrm{OAB}=\measuredangle\mathrm{OBA}=\frac{180°-106.26°}{2}=36.87°$$

$\left|z\right|=\left|\overline{z}\right|=\mathrm{r}=1\ \Rightarrow\ \mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$ (ii)

$$\mathrm{AK}=\mathrm{KB}=1\cdot\sin53.13°=0.8$$

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AK}+\mathrm{KB}=2\cdot0.8=1.6$$

(4) $f'(x)=2x-4\ ,\ g'(x)=e^{f(x)}(x-2)$

המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הקיצון מקביל לציר ה- x ,

ואם הוא חותך את ציר ה- y בנקודה $(0,-2)$, אז משוואתו: $y=-2$,

כלומר: בנקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ מתקיים: $f(x_{\text{קיצון}})=-2$

נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$:

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ 2x-4=0\ \Rightarrow\ x=2\ \Rightarrow\ f(2)=-2$$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x-4)\,dx=x^2-4x+\mathrm{C}$$

$$f(2)=-2\ \Rightarrow\ 2^2-4\cdot2+\mathrm{C}=-2\ \Rightarrow\ -4+\mathrm{C}=-2\ \Rightarrow\ \mathrm{C}=2$$

$$f(x)=x^2-4x+2$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון **035807**

(א) (*i*) $x=0 \Rightarrow g'(0)=e^{f(0)}(0-2)=e^{0-0+2}(-2)=-2e^2$

$y=0 \Rightarrow g'(x)=0 \Rightarrow e^{f(x)}(x-2)=0 \Rightarrow x=2$

(כי $e^{f(x)}>0$ לכל ערך של x).

תשובה: $(2,0)$, $(0,-2e^2)$.

(*ii*) $g''(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot(x-2)+e^{f(x)}=$

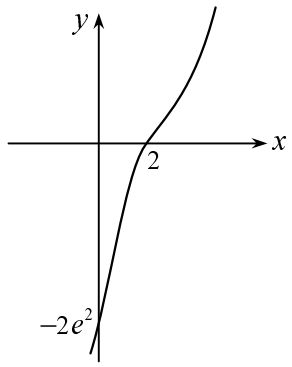
$=e^{f(x)}[(2x-4)(x-2)+1]=e^{f(x)}[2(x-2)^2+1]$

$e^{f(x)}>0$ לכל ערך של x , $2(x-2)^2+1>0$ לכל ערך של x ,

לכן $g''(x)>0$ לכל ערך של x , כלומר הפונקציה $g'(x)$ עולה לכל x .

(*iii*) מהנתונים נסיק כי $x=2$ היא נקודת פיתול של $g'(x)$.

ראו סרטוט משמאל.



(ב) $g(x)=\int g'(x)\,dx=\int e^{f(x)}(x-2)\,dx=$

$=\int e^{x^2-4x+2}(x-2)\,dx=\frac{1}{2}e^{x^2-4x+2}+C$

הישר $y=\frac{1}{2e^2}+2$ מקביל לציר ה- x , לכן הוא משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודת הקיצון שלה (כי יש רק נקודה משותפת אחת).

נקודת הקיצון (מינימום) של הפונקציה $g(x)$ היא בנקודה שבה $x=2$,

לכן $g(2)=\frac{1}{2e^2}+2$, ואז:

$$\frac{1}{2}e^{2^2-4\cdot2+2}+C=\frac{1}{2e^2}+2$$

$$\frac{1}{2}e^{-2}+C=\frac{1}{2e^2}+2 \Rightarrow C=2$$

תשובה: $g(x)=\frac{1}{2}e^{x^2-4x+2}+2$.

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035807

(5) נבחר יחידת זמן = שנה אחת.

(א) **יער I :** $N_0 = 10{,}000$ טון , $f(1) = 20{,}000$ טון

$$f(1) = N_0 \cdot a^1 \quad \Rightarrow \quad 20{,}000 = 10{,}000 \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

$$f(x) = 10{,}000 \cdot 2^x$$

יער II : $M_0 = 50{,}000$ טון , $g(1) = 60{,}000$ טון

$$g(1) = M_0 \cdot b^1 \quad \Rightarrow \quad 60{,}000 = 50{,}000 \cdot b \quad \Rightarrow \quad b = 1.2$$

$$g(x) = 50{,}000 \cdot 1.2^x$$

(ב)
$$f(x) > g(x) \quad \Rightarrow \quad 10{,}000 \cdot 2^x > 50{,}000 \cdot 1.2^x$$

$$0.2 > 0.6^x \quad \Rightarrow \quad x > \log_{0.6} 0.2 = \frac{\ln 0.2}{\ln 0.6} \approx 3.15$$

משקל העץ ביער I יהיה גדול ממשקל העץ ביער II כעבור (בערך) 3.15 שנים מיום הנטיעה.

(ג) ראו פתרון בספר הבחינות.

(ד) פונקציית המטרה: $F(x) = g(x) - f(x) = 50{,}000 \cdot 1.2^x - 10{,}000 \cdot 2^x$

$$F(x) = 10{,}000 \cdot (5 \cdot 1.2^x - 2^x)$$

$$F'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 10{,}000 \cdot (5 \cdot 1.2^x \cdot \ln 1.2 - 2^x \cdot \ln 2) = 0$$

$$5 \cdot 1.2^x \cdot \ln 1.2 = 2^x \ln 2 \quad \Rightarrow \quad 0.6^x = \frac{\ln 2}{5 \ln 1.2}$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{\ln 2}{5 \ln 1.2}\right)}{\ln 0.6} = 0.536 \text{ שנים}$$

x	$0 \le x < 0.536$	$x = 0.536$	$x > 0.536$
$F'(x)$	+	0	−
$F(x)$	↗	max	↘

$$F'(0) = 10{,}000 \cdot (5 \ln 1.2 - \ln 2) > 0$$

$$F'(1) = 10{,}000 \cdot (6 \ln 1.2 - 2 \ln 2) < 0$$

תשובה: ההפרש הגדול ביותר בין משקל העץ ביער II למשקל העץ ביער I יהיה כעבור 0.536 שנים מיום הנטיעה.

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035807

גבי יקואל



www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◊ לכל הכיתות ◊ לכל השאלונים ◊ לכל הרמות