פתרון מבחן מס' 37 (ספר מבחנים – שאלון 035805)

(1) (א) סדרת המקומות של סדרה ① מהווה סדרה חשבונית:

$1\ ,\ 4\ ,\ 7\ ,\ 10\ ,\ \ldots\ ,\ 34$

$34=1+3(n_1-1) \ \Rightarrow\ \ \Rightarrow\ 3(n_1-1)=33 \ \Rightarrow\ n_1=12$

סדרת המקומות של סדרה ② מהווה סדרה חשבונית:

$2\ ,\ 5\ ,\ 8\ ,\ 11\ ,\ \ldots\ ,\ 35$

$35=2+3(n_2-1) \ \Rightarrow\ 3(n_2-1)=33 \ \Rightarrow\ n_2=12$

(ב) $\frac{P}{Q}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \frac{a_1+a_3+a_7+\ldots+a_{34}}{a_1\cdot q+a_3\cdot q+a_7\cdot q+\ldots+a_{34}\cdot q}=\frac{a_1+a_3+a_7+\ldots+a_{34}}{q(a_1+a_3+a_7+\ldots+a_{34})}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{q}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \ \Rightarrow\ q=\sqrt[3]{2}$$

(ג) $a_1=4 \ \Rightarrow\ P=a_1\cdot\frac{(q^3)^{12}-1}{q^3-1}=4\cdot\frac{2^{12}-1}{2-1}=16{,}380$

(ד) סדרת המקומות מהווה סדרה חשבונית: $7\ ,\ 13\ ,\ 19\ ,\ \ldots\ ,\ 49$

$d=13-7=6 \ \Rightarrow\ 49=7+6(n-1)$

$6(n-1)=42 \ \Rightarrow\ n-1=7 \ \Rightarrow\ n=8$

הסדרה הנתונה היא סדרה הנדסית שבה: $A_1=a_7=a_1\cdot q^6=4\cdot(\sqrt[3]{2})^6$

$A_1=4\cdot 4=16\ ,\ Q=q^6=(\sqrt[3]{2})^6=4\ ,\ N=8$

$S_8=16\cdot\frac{4^8-1}{4-1}=349{,}520$

(2) (א) נתבונן בריבוע $A'B'C'D'$.

$C'F=FB'\ ,\ \sphericalangle C'=\sphericalangle B'=90°\ ,\ C'D'=B'A'$

מכאן ש- $\Delta D'C'F\cong\Delta A'B'F$ לפי משפט חפיפה צ.ז.צ.,

ולכן $D'F=A'F$ (צלעות מתאימות שוות במשולשים חופפים)

בדרך דומה, אפשר להוכיח כי $BF=CF$.

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035805

$B'F = B'F$ (כל גודל שווה לעצמו)

$\sphericalangle FB'A' = \sphericalangle FB'B = 90°$

$B'A' = B'B$ (בקובייה כל המקצועות שווים)

$\Downarrow$

$\Delta A'FB' \cong \Delta BFB'$ (לפי משפט חפיפה צ.ז.צ.)

$\Downarrow$

$A'F = BF$ (צלעות מתאימות שוות במשולשים חופפים)

$\Downarrow$

$FD' = FA' = FC = FB$ (הצבה)

$\Downarrow$

הפירמידה $FA'D'CB$ היא פירמידה ישרה

(ב) נתון כי אורך צלע הריבוע $A'D'BC$ הוא a.

(*i*) לפי משפט פיתגורס ב- $\Delta A'AB$:

$$A'B^2 = A'A^2 + AB^2 = a^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad A'B = a\sqrt{2}$$

לפי משפט פיתגורס ב- $\Delta A'D'B$:

$$D'B^2 = D'A'^2 + A'B^2 \quad \Rightarrow \quad D'B^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = 3a^2$$

$$D'B = a\sqrt{3}$$

$$D'O = OB = \frac{1}{2}D'B = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

לפי משפט פיתגורס ב- $\Delta FBB'$:

$$BF^2 = B'F^2 + BB'^2$$

$$BF^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad BF = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

ב- ΔFOB :

$$\cos\sphericalangle B = \frac{OB}{BF} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\sphericalangle B = \sphericalangle FBO = \sphericalangle FBD' \approx 39.23°$$

(*ii*) ב- ΔFOB :

$$FO = OB \cdot \tan\sphericalangle B = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 39.23° \approx 0.707a$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A'B \cdot BC \cdot FO = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot a \cdot 0.707a = \frac{a^3}{3}$$

© כל הזכויות שמורות להוצאת שבתי (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035805

(3) (א)

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=0 \;\Rightarrow\; 1-\mathrm{a}+2\mathrm{b}=0$$

$$f(1)=0 \;\Rightarrow\; 2-\mathrm{a}+\mathrm{b}=0$$

$$-\begin{cases}\mathrm{a}-2\mathrm{b}=1\\ \mathrm{a}-\mathrm{b}=2\end{cases} \;\Rightarrow\; -\mathrm{b}=-1 \;\Rightarrow\; \mathrm{b}=1 \;\Rightarrow\; \mathrm{a}=3$$

מכאן: $f(x)=2x-3+\frac{1}{x}$.

(ב)

$$g'(x)=f(x) \;\Rightarrow\; g'(x)=2x-3+\frac{1}{x}\ ,\ x\neq 0$$

(*i*)

$$g'(x)=0 \;\Rightarrow\; 2x-3+\frac{1}{x}=0 \;\Rightarrow\; 2x^2-3x+1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm 1}{4} \;\Rightarrow\; x_1=1\ ,\ x_2=\frac{1}{2}$$

x	$x<\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<1$	$x=1$	$x>1$
g′(x)	+	0	−	0	+
g(x)	↗	max	↘	min	↗

$$g'\left(\tfrac{1}{4}\right)=\tfrac{1}{2}-3+4>0 \quad , \quad g'\left(\tfrac{3}{4}\right)=\tfrac{3}{2}-3+\tfrac{4}{3}<0$$

$$g'(2)=4-3+\tfrac{1}{2}>0$$

$x_{\min}=1$, $x_{\max}=\frac{1}{2}$.

(*ii*) הפונקציה $g(x)$ עולה עבור $0<x<\frac{1}{2}$, $x>1$

ויורדת עבור: $\frac{1}{2}<x<1$.

(ג)

(*i*)

$$g(x)=\int g'(x)\,dx=\int\left(2x-3+\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$=x^2-3x+\ln|x|+\mathrm{C}$$

$$g(1)=0 \;\Rightarrow\; 1-3+0+\mathrm{C}=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{C}=2$$

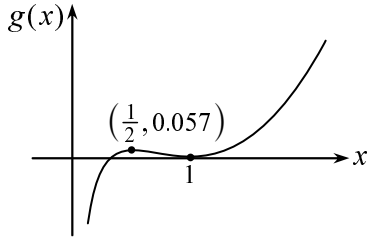
נתון כי $x>0$, לכן $|x|=x$ ומכאן:

$$g(x)=x^2-3x+\ln x+2$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון **035805**

(*ii*) ראו סרטוט משמאל.



$$g\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{2}+2+\ln\tfrac{1}{2}\approx 0.057$$

ונתון: $g(1)=0$.

(*iii*)
$$S=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2x-3+\tfrac{1}{x}\right)dx=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}g'(x)\,dx=-g(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=$$
$$=g\left(\tfrac{1}{2}\right)-g(1)=0.057-0=0.057 \text{ יחידות שטח}$$

(4) (א) הנקודות D ו- I הן נקודות הקיצון של גרף א'
ובנקודות המתאימות להן (בעלות אותו שיעור ה- x) בגרף ב' (E ו- H)
שיעור ה- y שווה ל- 0.
אבל, כאשר גרף א' עולה (מ- A ל- D ומ- I עד J),
גרף ב' הוא שלילי, לכן לא ייתכן שגרף א' מייצג פונקציה
וגרף ב' מייצג את נגזרת אותה הפונקציה.
לנקודות הקיצון של גרף ב' (C ו- F) מתאימות נקודות אפס של
גרף א' (B ו- G), לתחומי העלייה של גרף ב' (מ- C עד F) מתאים
תחום החיוביות של גרף א' (מ- B עד G) ולירידה של גרף ב'
(מ- O ל- C, מ- F ל- K) מתאים תחום השליליות של גרף א'
(מ- A ל- B, מ- G ל- J).
לכן: $f(x)$ – גרף ב', $f'(x)$ – גרף א'.

(ב) (*i*)
$$\int_0^x(-4\sin 2x)\,dx=2\cos 2x\Big|_0^x=2(\cos 2x-\cos 0)=$$
$$=2(\cos 2x-1)=2(1-2\sin^2 x-1)=-4\sin^2 x$$
ולכן: $f(x)=-4\sin 2x$.

(*ii*) C ו- F הן נקודות הקיצון של $f(x)$.
$$f'(x)=(-4\sin 2x)'=-8\cos 2x$$
$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; -8\cos 2x=0 \;\Rightarrow\; \cos 2x=0$$
$$\Rightarrow\; 2x=\frac{\pi}{2}+\pi n \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035805

$x_C=\frac{\pi}{4} \Rightarrow y_C=-4\sin\frac{\pi}{2}=-4 \Rightarrow C\left(\frac{\pi}{4},-4\right)$ כלומר:

$x_F=\frac{3\pi}{4} \Rightarrow y_F=-4\sin\frac{3\pi}{2}=4 \Rightarrow F\left(\frac{3\pi}{4},4\right)$

K היא נקודת הקצה של הפונקציה $f(x)$ ($x=\frac{5\pi}{4}$), לכן:

$x=\frac{5\pi}{4} \Rightarrow y=f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-4\sin\frac{5\pi}{2}=-4 \Rightarrow K\left(\frac{5\pi}{4},-4\right)$

I היא נקודת המינימום של הפונקציה $f'(x)$.

$f''(x)=(-8\cos 2x)'=16\sin 2x$

$f''(x)=0 \Rightarrow 16\sin 2x=0 \Rightarrow \sin 2x=0$

$2x=\pi n \Rightarrow x=\frac{\pi n}{2}\ ,\ n\in\mathbb{Z}$

$x_I=\pi \Rightarrow y_I=f'(\pi)=-8\cos 2\pi=-8 \Rightarrow I(\pi,-8)$

(*iii*) נמצא את שיעורי ה- x של הנקודות B ו- G.

בנקודות אלה הנגזרת שווה ל- 0 ($f'(x)=0$), כלומר נקודות אלה מתאימות לנקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$:

$x_G=x_F=\frac{3\pi}{4}\ ,\ x_B=x_C=\frac{\pi}{4}$

$$S_{\text{אפור}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f'(x)\,dx=f(x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=y_F-y_C=4+4=8 \text{ יחידות שטח}$$

(*iv*) השטח המקווקו נמצא מתחת לציר ה- x, לכן:

$$S_{\text{מקווקו}}=-\int_{x_H=x_I}^{\frac{5\pi}{4}} f(x)\,dx=-\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} f(x)\,dx=-(-4\sin^2 x)\Big|_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}=$$

$$=4\sin^2 x\Big|_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}=4\left(\sin^2\frac{5\pi}{4}-\sin^2\pi\right)=$$

$$=4\left(\frac{1}{2}-0\right)=2 \text{ יחידות שטח}$$

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035805

(5) (א) נתון בגרף כי $f'(2)=0$.

$$f'(x)=\frac{e^{x-2}(x-\mathrm{c})-e^{x-2}}{(x-\mathrm{c})^2}=\frac{e^{x-2}(x-\mathrm{c}-1)}{(x-\mathrm{c})^2}$$

$$f'(2)=\frac{1\cdot(2-\mathrm{c}-1)}{(2-\mathrm{c})^2}=0 \quad\Rightarrow\quad 1-\mathrm{c}=0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{c}=1$$

כלומר: $f(x)=\frac{e^{x-2}}{x-1}$.

(ב) תחום הגדרה: $x\neq 1$.

(ג) נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ היא בנקודה $x=2$ ($f'(2)=0$).
פונקציית הנגזרת מחליפה סימן בנקודה זו ממינוס לפלוס, כלומר
משמאל לנקודה $x=2$ הפונקציה $f(x)$ יורדת, ואחרי הנקודה $x=2$
הפונקציה $f(x)$ עולה, כלומר בנקודה $x=2$ יש לפונקציה $f(x)$
נקודת מינימום.

$$f(2)=\frac{e^0}{2-1}=\frac{1}{1}=1 \quad\Rightarrow\quad \min(2,1)$$

(ד) קבענו שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון יחידה בנקודה שבה $x=2$,
והנקודה $(2,1)$ היא נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$,
לכן הגרפים II ו- IV אינם מתאימים, כי בגרפים אלו יש נקודת מקסימום.
נמצא את שיעור ה- y של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$
עם ציר ה- y :

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad f(0)=\frac{e^{0-2}}{0-1}=-\frac{1}{e^2}<0$$

לכן גרף I לא מתאים.
הגרף המתאים לפונקציה $f(x)$ הוא **גרף III** .

(ה)
$$\frac{e^{x-2}}{x-1}=\frac{1}{e}$$

$$0<\frac{1}{e}<1 \quad\Rightarrow\quad 0<\frac{1}{e}<y_{\min}$$

לכן הישר $y=\frac{1}{e}$ אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ (גרף III),
כלומר למשוואה הנתונה אין פתרון.

(ו)
$$S=\int_2^3 f'(x)\,dx=f(x)\Big|_2^3=f(3)-f(2)=$$

$$=\frac{e^{3-2}}{3-1}-\frac{e^{2-2}}{2-1}=\left(\frac{e}{2}-1\right) \text{ יחידות שטח}$$

© כל הזכויות שמורות להוצאת שבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035805

גבי יקואל



www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◊ לכל הכיתות ◊ לכל השאלונים ◊ לכל הרמות