פתרון מבחן מס' 36 (ספר מבחנים – שאלון 035805)

(1) נוכיח כי סדרת האיברים $a_1 \ , \ -a_3 \ , \ a_5 \ , \ -a_7 \ , \ \dots$ היא סדרה הנדסית.

הנוסחה של מקום כללי $(1 , 3 , 5 , \dots)$ היא: $N = 1 + 2(n-1) = 2n-1$

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = -\frac{a_1 q^{2n}}{a_1 q^{2n-2}} = -q^2 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = -q^2 \ , \ |Q_1| < 1$$

נוכיח כי סדרת האיברים $a_3 \ , \ a_7 \ , \ a_{11} \ , \ a_{15} \ , \ \dots$ היא סדרה הנדסית.

הנוסחה של מקום כללי $(3 , 7 , 11 , 15 , \dots)$ היא:

$$N = 3 + 4(n-1) = 4n-1$$

$$\frac{a_{4n+3}}{a_{4n-1}} = \frac{a_1 q^{4n+2}}{a_1 q^{4n-2}} = q^4 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = q^4 \ , \ |Q_2| < 1$$

(א)

$$S_1 = \frac{a_1}{1-Q_1} = \frac{a_1}{1+q^2} \quad , \quad S_2 = \frac{a_3}{1-Q_2} = \frac{a_1 q^2}{1-q^4}$$

$$S_1 = 3 \cdot S_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{1+q^2} = \frac{3a_1 q^2}{1-q^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+q^2} = \frac{3q^2}{(1+q^2)(1-q^2)}$$

$$1+q^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3q^2}{1-q^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 3q^2 = 1-q^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad q^2 = \tfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad q = \pm\tfrac{1}{2}$$

(ב) *(i)*

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1} = 2 = \text{const}$$

הסדרה b_n היא סדרה הנדסית עולה $(2 > 1)$ ומנתה $q = 2$.

(ii)

$$S_n = \frac{127}{2^{k-1}} \quad \Rightarrow \quad b_1 \cdot \frac{2^n - 1}{2-1} = \frac{127}{2^{k-1}}$$

$$b_1 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} = 2^{1-k} \quad \Rightarrow \quad 2^{1-k} \cdot (2^n - 1) = \frac{127}{2^{k-1}}$$

$$2^n - 1 = 127 \quad \Rightarrow \quad 2^n = 128 = 2^7 \quad \Rightarrow \quad n = 7$$

כלומר בסדרה b_n יש 7 איברים.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n = 2^{42}$$ (*iii*)

$$b_1 \cdot b_1q \cdot b_1q^2 \cdot \dots \cdot b_1q^{n-1} = 2^{42}$$

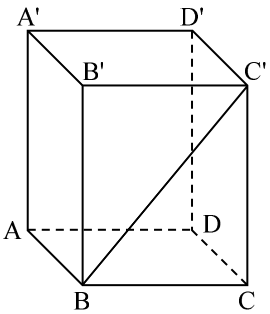
$$b_1^{\,n} \cdot q^{1+2+\dots+(n-1)} = 2^{42} \quad \Rightarrow \quad \left(2^{1-k}\right)^n \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{42}$$

$$2^{n-nk+\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{42} \quad \Rightarrow \quad 7-7k+\frac{7\cdot 6}{2} = 42 \quad \Rightarrow \quad k=-2$$

הערה: $1+2+\dots+(n-1) =$

$=$ סכום $(n-1)$ איברים בסדרה חשבונית $=$

$$= \frac{(a_1+a_N)\cdot N}{2} = \frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$



(2) CC' מאונך למישור הבסיס, לכן BC הוא ההיטל של BC' על מישור הבסיס, והזווית הנתונה היא: $\measuredangle C'BC = 62°$.

(א) הזווית המבוקשת היא $\measuredangle BD'B'$
($D'B'$ הוא ההיטל של $D'B$ על המישור $A'B'C'D'$).

נסמן את אורך צלע הריבוע ב- a .

לפי משפט פיתגורס ב- ΔABD :

$$DB^2 = AD^2 + AB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad DB = D'B' = a\sqrt{2}$$

ב- $\Delta BCC'$:
$$\tan 62° = \frac{CC'}{BC} \quad \Rightarrow \quad CC' = BB' = a\tan 62°$$

ב- $\Delta BB'D$:
$$\tan \measuredangle D' = \frac{BB'}{D'B'} = \frac{CC'}{DB} = \frac{a\tan 62°}{a\sqrt{2}} = \frac{\tan 62°}{\sqrt{2}}$$

$$\measuredangle D' = \measuredangle BD'B' = 53.06°$$

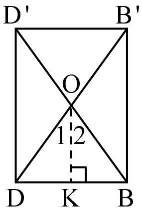
(ב) $D'C'$ מאונך למישור $BCC'B'$, לכן BC' הוא ההיטל של BD' על המישור $BCC'B'$ והזווית המבוקשת היא $\measuredangle D'BC'$.

ב- $\Delta BCC'$:
$$\cos 62° = \frac{BC}{BC'} \quad \Rightarrow \quad BC' = \frac{BC}{\cos 62°} = \frac{a}{\cos 62°}$$

ב- $\Delta BC'D'$:
$$\tan \measuredangle B = \frac{D'C'}{BC'} = \frac{a\cos 62°}{a} = \cos 62°$$

$$\measuredangle B = \measuredangle D'BC' \approx 25.15°$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄



(ג) נתבונן במלבן $BDD'B'$.

מנקודת מפגש האלכסונים O נוריד גובה OK לצלע DB .

ΔDOB הוא משולש שווה-שוקיים, לכן הגובה OK

לבסיס הוא גם תיכון לבסיס ($DK = KB = \frac{a}{2}$).

הזווית המבוקשת היא $\measuredangle DOB$.

ב- ΔOKB :

$$\tan \measuredangle O_2 = \frac{KB}{OK} = \frac{\frac{1}{2}DB}{\frac{1}{2}BB'} = \frac{a\sqrt{2}}{a\tan 62^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\tan 62^\circ} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle O_2 = 36.94^\circ$$

$$\measuredangle DOB = 2 \cdot \measuredangle O_2 = 2 \cdot 36.94^\circ = 73.88^\circ$$

(3) (א)

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{x - a}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad , \quad f'(1) = 1 + \frac{1-a}{3}$$

$$1 + \frac{1-a}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1-a}{3} = -1 \quad \Rightarrow \quad 1 - a = -3 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

(ב)

$$f'(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{x-4}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad , \quad f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x}$$

(i) תחום הגדרה: כל x .

(ii)

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{x} + \frac{x-4}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \quad / \cdot 3\sqrt[3]{x^2}$$

$$3x + x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$f(1) = (1-4) \cdot 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad (1, -3)$$

x	$x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min	↗

$$f'\left(\frac{1}{27}\right) = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{27} - 4}{3 \cdot \frac{1}{9}} < 0 \quad , \quad f'(27) = 3 + \frac{27-4}{+} > 0$$

תשובה: $\min(1, -3)$.

המשך בעמוד הבא ➤➤➤

(iii) הפונקציה עולה ($f'(x)>0$) עבור $x>1$,
הפונקציה יורדת ($f'(x)<0$) עבור $x<1$.

(iv) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$$x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0,0)$$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

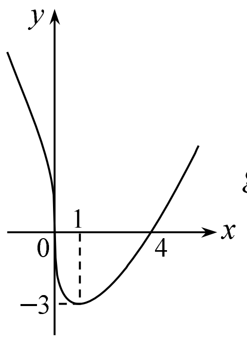
$$y=0 \Rightarrow (x-4)\sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow$$

$$x_1=4\ ,\ x_2=0 \Rightarrow (4,0)\ ,\ (0,0)$$

תשובה: נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים:

$$(4,0)\ ,\ (0,0)$$

(ג) ראו סרטוט משמאל.



(ד) (i) נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$
קיימת כאשר:

$$g'(x)=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x=0\ ,4$$

$x=0$ אינה נקודה פנימית של $g(x)$,
ו- $x=4$ מינימום של הפונקציה $g(x)$
מכיוון שעבור $0<x<4$ הנגזרת שלילית,
כלומר הפונקציה יורדת, ועבור $x>4$ הנגזרת חיובית,
כלומר הפונקציה עולה.

(ii) הפונקציה $g(x)$ עולה עבור: $g'(x)=f(x)>0 \Rightarrow x>4$
הפונקציה $g(x)$ יורדת עבור:

$$g'(x)=f(x)<0 \Rightarrow 0\le x<4 \quad (x=0 \text{ נקודת קצה})$$

(iii) $\mathrm{m}=g'(8)=f(8)=(8-4)\sqrt[3]{8}=4\cdot 2=8$

(4) (א) נמצא את נקודות החיתוך של כל אחד מהגרפים עם ציר ה- y :

$$g(0)=-e^2-1 \quad , \quad f(0)=-e^{-1}-1$$

$-e^2-1<-e^{-1}-1$, לכן גרף I מתאים ל- $g(x)$
וגרף II מתאים ל- $f(x)$.

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ב) נמצא את שיעורי נקודת החיתוך בין הגרפים:

$$f(x)=g(x) \;\Rightarrow\; -e^{-1-x}-1=-e^{2x+2}-1$$
$$e^{-1-x}=e^{2x+2} \;\Rightarrow\; -1-x=2x+2 \;\Rightarrow\; x=-1$$
$$y=-e^{0}-1=-2 \;\Rightarrow\; (-1,-2)$$

נמצא משוואות המשיקים לגרפים של שתי הפונקציות.

נמצא את שיפועי המשיקים:

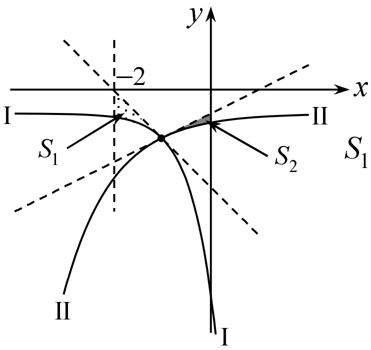
$f(x)$ (גרף II):
$$f'(x)=e^{-1-x} \;\Rightarrow\; f'(-1)=1 \;\Rightarrow\; \mathrm{m}_1=1$$

$g(x)$ (גרף I):
$$g'(x)=-2e^{2x+2} \;\Rightarrow\; g'(-1)=-2 \;\Rightarrow\; \mathrm{m}_2=-2$$

משוואות המשיקים הם:

$$f(x)\;:\; y+2=1\cdot(x+1) \;\Rightarrow\; y=x-1$$
$$g(x)\;:\; y+2=-2(x+1) \;\Rightarrow\; y=-2x-4$$

נסמן את השטחים המבוקשים:



(*i*)
$$S_1=\int_{-2}^{-1}(-2x-4+e^{2x+2}+1)\,dx=$$
$$=(-x^2-3x+\tfrac{1}{2}e^{2x+2})\Big|_{-2}^{-1}=$$
$$=-1+3+\tfrac{1}{2}-\left(-4+6+\frac{1}{2e^2}\right)=$$
$$=2.5-2-\frac{1}{2e^2}=$$
$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}\right)$ יחידות שטח

(*ii*)
$$S_2=\int_{-1}^{0}(x-1+e^{-1-x}+1)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-e^{-1-x}\right)\Big|_{-1}^{0}=$$
$=0-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)$ יחידות שטח

(5) **(א)**

$f(0)=0 \Rightarrow 2-a\cos 0-b\sin 0=0$

$2-a-0=0 \Rightarrow a=2$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Rightarrow 2-2\cos\pi-b\sin\frac{\pi}{2}=0$

$2+2-b=0 \Rightarrow b=4$

(ב)

$f(x)=2-2\cos 2x-4\sin x$

$f'(x)=4\sin 2x-4\cos x=4(2\sin x\cos x-\cos x)=$

$=4\cos x(2\sin x-1)$

(i)

$f'(x)=0 \Rightarrow 4\cos x(2\sin x-1)=0$

$\cos x=0 \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n \ , \ n\in\mathbb{Z}$

$\sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow x_2=\frac{\pi}{6}+2\pi k \ , \ x_3=\frac{5\pi}{6}+2\pi t \ , \ k,t\in\mathbb{Z}$

בתחום הנתון:

$x_1 : x=\frac{\pi}{2} \ , \ x=\frac{3\pi}{2} \quad , \quad x_2 : x=\frac{\pi}{6} \quad , \quad x_3 : x=\frac{5\pi}{6}$

x	$0<x<\frac{\pi}{6}$	$x=\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$	$x=\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{6}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘

x	$x=\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}<x<\frac{3\pi}{2}$	$x=\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	min	↗	max	↘

$f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=4\cos\frac{\pi}{12}\left(2\sin\frac{\pi}{12}-1\right)<0$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\frac{\pi}{3}\left(2\sin\frac{\pi}{3}-1\right)>0$

$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=4\cos\frac{3\pi}{4}\left(2\sin\frac{3\pi}{4}-1\right)<0$

$f'(\pi)=4\cos\pi\left(2\sin\pi-1\right)>0$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$f'\left(\frac{7\pi}{4}\right)=4\cos\frac{7\pi}{4}\left(2\sin\frac{7\pi}{4}-1\right)<0$

$f(0)=0 \Rightarrow (0,0)$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2-2\cos\frac{\pi}{3}-4\sin\frac{\pi}{6}=2-1-2=-1 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{6},-1\right)$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2-2\cos\pi-4\sin\frac{\pi}{2}=2+2-4=0 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2},0\right)$

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2-2\cos\frac{5\pi}{3}-4\sin\frac{5\pi}{6}=2-1-2=-1 \Rightarrow \left(\frac{5\pi}{6},-1\right)$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2-2\cos3\pi-4\sin\frac{3\pi}{2}=2+2+4=8 \Rightarrow \left(\frac{3\pi}{2},8\right)$

$f(2\pi)=0 \Rightarrow (2\pi,0)$

תשובה: $(0,0)$ מקסימום ; $\left(\frac{\pi}{6},-1\right)$ מינימום ;
$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ מקסימום ; $\left(\frac{5\pi}{6},-1\right)$ מינימום ;
$\left(\frac{3\pi}{2},8\right)$ מקסימום ; $(2\pi,0)$ מינימום.

(ii) שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y :

$x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0,0)$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$y=0 \Rightarrow 2-2\cos2x-4\sin x=0 \quad /:2$

$1-\cos2x-2\sin x=0 \Rightarrow 2\sin^2 x-2\sin x=0$

$2\sin x(\sin x-1)=0$

$\sin x=0 \Rightarrow x_1=\pi n \ , \ n\in\mathbb{Z}$

$\sin x=1 \Rightarrow x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k \ , \ k\in\mathbb{Z}$

בתחום הנתון: $x_1=0 \ , \ x_2=\frac{\pi}{2} \ , \ x_3=\pi \ , \ x_4=2\pi$

תשובה: $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $(\pi,0)$, $(2\pi,0)$.

ג) $S=\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-2\cos2x-4\sin x)\,dx\right|=\left|(2x-\sin2x+4\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right|=$

$=\left|\pi-0+0-(0-0+4)\right|=\left|\pi-4\right|=$ $(4-\pi)$ יחידות שטח

המשך בעמוד הבא >>>

ד) (i) $f(x) \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 0 \,,\, \frac{\pi}{2} \,,\, \pi \,,\, 2\pi$

כלומר תחום ההגדרה: $0 < x < \frac{\pi}{2} \;,\; \frac{\pi}{2} < x < \pi \;,\; \pi < x < 2\pi$

(ii) $g'(x) = -\frac{1}{\left(f(x)\right)^2} \cdot f'(x)$

$g'(x) = 0 \;\Rightarrow\; f'(x) = 0$

כמו-כן, הסימן של $g'(x)$ מנוגד לסימן של $f'(x)$,

לכן אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום ששיעוריה

$\min(x_0 \;,\; f(x_0))$, אז לפונקציה $g(x)$ נקבל:

$\max\left(x_0, \frac{1}{f(x_0)}\right)$, ואם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום

ששיעוריה $\max(x_1 \;,\; f(x_1))$, אז לפונקציה $g(x)$ נקבל:

$\min\left(x_1, \frac{1}{f(x_1)}\right)$.

כלומר לפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון בנקודות:

$$x = \frac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -1 \;\Rightarrow\; \max\left(\frac{\pi}{6}, -1\right)$$

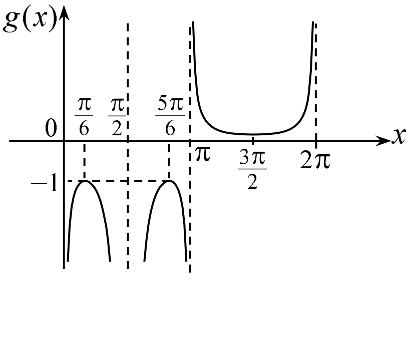
$$x = \frac{5\pi}{6} \;\Rightarrow\; g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = -1 \;\Rightarrow\; \max\left(\frac{5\pi}{6}, -1\right)$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \;\Rightarrow\; g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{1}{8} \;\Rightarrow\; \min\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{1}{8}\right)$$

(iii) תחומי עלייה: $0 < x < \frac{\pi}{6} \;,\; \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6} \;,\; \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \;,\; \frac{5\pi}{6} < x < \pi \;,\; \pi < x < \frac{3\pi}{2}$

(iv)



גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות