פתרון מבחן מס' 22 (ספר מבחנים – שאלון 035804)

(1) (א) נסמן את צלעות המלבן ב- x ו- y .

מהנתונים של השטח וההיקף של המלבן נקבל:

$$\begin{cases} 2(x+y)=56 \\ x\cdot y=292 \end{cases}$$

$$x+y=28 \;\Rightarrow\; y=28-x$$

$$x\cdot(28-x)=192 \;\Rightarrow\; 28x-x^2=192 \;\Rightarrow\; x^2-28x+192=0$$

$$x_{1,2}=\frac{28\pm\sqrt{28^2-4\cdot192}}{2}=\frac{28\pm4}{2} \;\Rightarrow\; x_1=16 \;,\; x_2=12$$

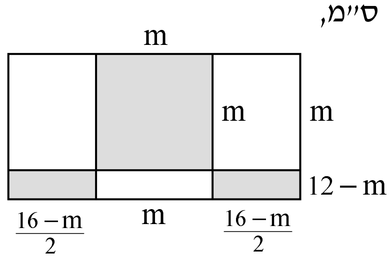
$$x_1=16 \;\Rightarrow\; y_1=12 \quad , \quad x_2=12 \;\Rightarrow\; y_2=16$$

כלומר אורך הצלע הארוכה של המלבן 16 ס"מ,

ואורך הצלע הקצרה של המלבן 12 ס"מ.

כמו-כן נתון שצלע הריבוע m ס"מ.

נציין בסרטוט את מה שידוע.



לכן סכום השטחים האפורים:

$$S=m^2+2\cdot(12-m)\cdot\frac{16-m}{2}=m^2+(12-m)(16-m)$$

$$S=m^2+192-12m-16m+m^2= \text{סמ"ר}\;\; 2m^2-28m+192$$

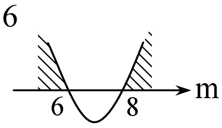
(ב)

$$96\le S\le112 \;\Rightarrow\; 96\le 2m^2-28m+192\le112$$

$$\begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}\begin{cases} 2m^2-28m+192\ge96 \\ 2m^2-28m+192\le112 \end{cases}$$

① $2m^2-28m+96\ge0 \;\;/:2 \;\Rightarrow\; m^2-14m+48\ge0$

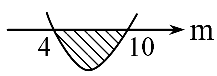
① $m_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{14^2-4\cdot48}}{2}=\frac{14\pm2}{2} \;\Rightarrow\; m_1=8 \;,\; m_2=6$



מכאן: $m\ge8$ או $m\le6$.

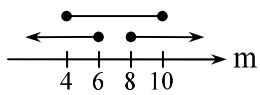
② $2m^2-28m+80\le0 \;\;/:2 \;\Rightarrow\; m^2-14m+40\le0$

$$m_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{14^2-4\cdot40}}{2}=\frac{14\pm6}{2} \;\Rightarrow\; m_1=10 \;,\; m_2=4$$



מכאן: $4\le m\le10$.

המשך בעמוד הבא >>>



מחיתוך התחומים, נקבל בסך הכול:

$4 \le m \le 6$, $8 \le m \le 10$.

(ג) **דרך ראשונה:**

$$S = f(m) = 2m^2 - 28m + 192$$

$$f'(m) = 4m - 28$$

$$f'(m) = 0 \;\Rightarrow\; 4m - 28 = 0 \;\Rightarrow\; m = 7$$

$$f''(m) = 4 > 0 \;\Rightarrow\; f_{min} = f(7) = 2 \cdot 7^2 - 28 \cdot 7 + 192 = 94$$

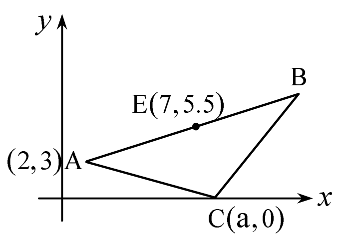
כלומר השטח S המינימלי הוא 94 סמ"ר.

דרך שנייה:

פונקציית השטח היא פונקציה ריבועית, כלומר הגרף שלה הוא פרבולה בעלת נקודת מינימום בקדקוד.

$$x_{\text{קדקוד}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-28}{2 \cdot 2} = 7 \;\Rightarrow\; f_{min} = f(7) = 94$$

(2) (א) הנקודה E היא אמצע הצלע AB לכן:



$$7 = \frac{2 + x_B}{2} \;\Rightarrow\; x_B = 12$$

$$5.5 = \frac{3 + y_B}{2} \;\Rightarrow\; y_B = 8$$

כלומר: $B(12,8)$.

(ב) נתון: $C(a,0)$, $a < 16$, $BC = \sqrt{80}$.

לכן:

$$\sqrt{80} = \sqrt{(12-a)^2 + (8-0)^2} \quad / \; (\;)^2$$

$$80 = (12-a)^2 + 64 \;\Rightarrow\; (12-a)^2 = 16$$

$$12 - a = 4 \text{ או } 12 - a = -4$$

$$a_1 = 16 \;,\; a_2 = 8$$

כלומר $a = 8$ (כי נתון $a < 16$).

(ג) $C(8,0)$, $B(12,8)$, $A(2,3)$

$$m_{AC} = \frac{3-0}{2-8} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{BC} = \frac{8-0}{12-8} = 2$$

מכיוון ש- $m_{AC} \cdot m_{BC} = -1$ הרי ש- $AC \perp BC$.

(3) נסמן ב- A את המאורע: תושב מהעיר שנבחר באקראי הוא גבר.

נסמן ב- B את המאורע: תושב מהעיר שנבחר באקראי תומך במפלגה ב׳.

נתון: $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.22$, $P(A\cap B)=0.27$, $P(\bar{A})>P(A)$,

$P(\bar{A})=P$. נערוך טבלת הסתברויות ונשלים את שאר ההסתברויות.

טבלת הסתברויות		מפלגה אי $\bar{B}$	מפלגה ב׳ B	סה״כ
מין	נשים $\bar{A}$	0.22	$P-0.22$	P
	גברים A	$0.73-P$	0.27	$1-P$
סה״כ		$0.95-P$	$P+0.05$	1

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-P$$
$$P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})-P(\bar{A}\cap\bar{B})=P-0.22$$
$$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=1-P-0.27=0.73-P$$
$$P(\bar{B})=P(\bar{A}\cap\bar{B})+P(A\cap\bar{B})=0.22+0.73-P=0.95-P$$
$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-(0.95-P)=P+0.05$$

(ב) נתון כי המאורעות A ו- B בלתי-תלויים,

לכן $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

כלומר:
$$0.27=(1-P)\cdot(P+0.05)$$
$$0.27=P+0.05-P^2-0.05P \quad\Rightarrow\quad P^2-0.95P+0.22=0$$
$$P_{1,2}=\frac{0.95\pm\sqrt{0.95^2-4\cdot 0.22}}{2}=\frac{0.95\pm 0.15}{2}\quad\Rightarrow\quad P_1=0.55\ ,\ P_2=0.4$$

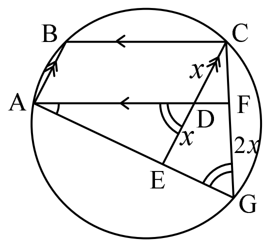
מכיוון ש- $P(\bar{A})>P(A)$ הרי $P(\bar{A})=P=0.55$.

(ג)
$$P\left(\begin{matrix}\text{גבר שתומך}\\ \text{במפלגה א׳}\end{matrix}\right)=P(\bar{A}\cap B)=0.73-0.55=0.18$$

נגדיר ״הצלחה״: נבחר גבר שתומך במפלגה א׳.

לפנינו התפלגות בינומית בה: $n=5$, $k=4,5$, $P=0.18$.

$$P\left(\begin{matrix}\text{לפחות 4 מ- 5 הם גברים}\\ \text{שתומכים במפלגה א׳}\end{matrix}\right)=P_5(4)+P_5(5)=$$
$$=\binom{5}{4}\cdot 0.18^4\cdot 0.82^1+\binom{5}{5}\cdot 0.18^5\cdot 0.82^0=$$
$$=0.0043+0.0002=0.0045$$



(4) (א) נתון: $ABCG$ חסום במעגל,

$ABCD$ מקבילית.

צ"ל: $\Delta ADE \sim \Delta AGF$.

הוכחה:

טענה:	נימוק:
$\measuredangle ABC + \measuredangle AGF = 180°$	סכום זוויות נגדיות במרובע החסום במעגל הוא $180°$.
$\measuredangle ABC = \measuredangle CDA$	זוויות נגדיות במקבילית $ABCD$ שוות זו לזו.
$\measuredangle ADE = 180° - \measuredangle CDA = 180° - \measuredangle ABC$	סכום זוויות צמודות שווה ל- $180°$.
$\Downarrow$	
$\measuredangle AGF = \measuredangle ADE = 180° - \measuredangle ABC$	
$\measuredangle FAG$ זווית משותפת למשולשים AGF ו- ADE.	
$\Downarrow$	
$\Delta ADE \sim \Delta AGF$	לפי משפט דמיון ז.ז.

(ב) נתון: $CD = DE$, $GF = 2AB$.

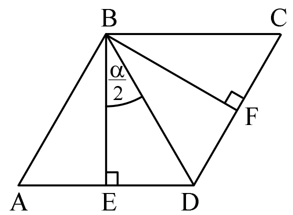
נסמן: $CD = x$ ואז $DE = x$.

$AB = DC = x$	צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו.
$\Downarrow$	
$GF = 2 \cdot AB = 2x$	

מדמיון המשולשים שמצאנו בסעיף (א) נקבל:

$\frac{AD}{AG} = \frac{DE}{GF}$	פרופורציות צלעות מתאימות במשולשים דומים.
$\frac{AD}{AG} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$	הצבה.

(5) (א) במעוין ABCD אורך כל אחת מהצלעות השווה הוא a .



מכיוון שבמשולש שווה-שוקיים ABD זוויות הבסיס שוות,

סכום הזוויות הוא 180° ונתון $\measuredangle BAD = \alpha$,

אז : $\measuredangle BDE = \measuredangle DBA = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

כמו כן : $\measuredangle EBD = \frac{\alpha}{2}$, כי סכום הזוויות במשולש EBD הוא 180° .

ב- ΔABE : $\sin\alpha = \frac{BE}{AB} \Rightarrow BE = a\sin\alpha$

$$S_{ABCD} = AD \cdot BE = a \cdot a\sin\alpha = a^2\sin\alpha$$

$$S_{EBFD} = S_{\Delta BED} + S_{\Delta BFD}$$

אך : $\Delta BED \cong \Delta BFD$ לפי משפט חפיפה צלע, צלע וזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן. ($BE = BF$ גבהים במעוין שווים זה לזה, $BD = BD$, $\measuredangle BED = \measuredangle BFD = 90^\circ$).

לכן : $S_{EBFD} = 2 \cdot S_{\Delta BED} = 2 \cdot \frac{BE \cdot ED}{2} = BE \cdot ED$

דרך ראשונה:

ב- ΔABE : $\cos\alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{AE}{a} \Rightarrow AE = a\cos\alpha$

$$ED = AD - AE = a - a\cos\alpha = a(1-\cos\alpha)$$

$$S_{EBFD} = BE \cdot ED = a\sin\alpha \cdot a(1-\cos\alpha) = a^2\sin\alpha(1-\cos\alpha)$$

$$\frac{S_{EBFD}}{S_{ABCD}} = \frac{a^2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{a^2\sin\alpha} = 1-\cos\alpha$$

דרך שנייה:

ב- ΔBED : $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{ED}{BE} \Rightarrow ED = BE \cdot \tan\frac{\alpha}{2} = a\sin\alpha \cdot \tan\frac{\alpha}{2}$

כלומר : $S_{EBFD} = a\sin\alpha \cdot a\sin\alpha \cdot \tan\frac{\alpha}{2} = a^2\sin^2\alpha\tan\frac{\alpha}{2}$

המשך בעמוד הבא ›››

ואז: $k=\frac{S_{EBFD}}{S_{ABCD}}=\frac{a^2\sin^2\alpha\tan\frac{\alpha}{2}}{a^2\sin\alpha}=\sin\alpha\tan\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=$

$$=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

מהזהות: $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

נקבל: $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$

אם נציב $\frac{\alpha}{2}$ במקום α נקבל: $2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$

כלומר: $k=1-\cos\alpha$

(ב) $k=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ 1-\cos\alpha=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{1}{2}$

$\alpha_1=60°+360°k$ או $\alpha_2=-60°+360°k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

מכיוון ש- α היא זווית במשולש, הרי ש- $\alpha=60°$.

(6) (א) $f(x)=\frac{x^2+9}{x}$ $\Leftarrow$ תחום ההגדרה $x\neq 0$.

הביטוי $x^2+9>0$ לכל x .

לכן: $f(x)>0\ \Rightarrow\ \frac{x^2+9}{x}>0\ \Rightarrow\ x>0$

$f(x)<0\ \Rightarrow\ \frac{x^2+9}{x}<0\ \Rightarrow\ x<0$

כלומר הפונקציה חיובית עבור $x>0$ ושלילית עבור $x<0$.

(ב) בהתאם לתשובה של סעיף (א) נסיק כי גרף II מתאר את הפונקציה הנתונה.

(ג) $f(x)=\frac{x^2+9}{x}=x+\frac{9}{x}\ \Rightarrow\ f'(x)=1-\frac{9}{x^2}=\frac{x^2-9}{x^2}$

$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{x^2-9}{x^2}=0\ \Rightarrow\ x^2-9=0\ \Rightarrow\ x=\pm 3$

$f(3)=\frac{9+9}{3}=6\ ,\ f(-3)=\frac{9+9}{-3}=-6$

לכן הנקודות ה"חשודות לקיצון": $(3,6)\ ,\ (-3,-6)$.

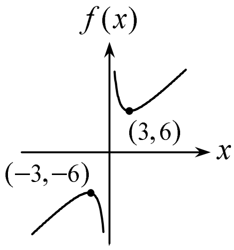
המשך בעמוד הבא ►►►

x	$x<-3$	$x=-3$	$-3<x<0$	$x=0$	$0<x<3$	$x=3$	$x>3$
f'(x)	+	0	−	נקודת אי-הגדרה	−	0	+
f(x)	↗	max	↘		↘	min	↗

$f'(-4)=\frac{16-9}{16}>0$ $\quad$ $f'(-1)=\frac{1-9}{1}<0$

$f'(1)=\frac{1-9}{1}<0$ $\quad$ $f'(4)=\frac{16-9}{16}>0$

כלומר: $\min(3,6)$, $\max(-3,-6)$.



ד) ניעזר בגרף II ובנקודות הקיצון שמצאנו.

הישר $y=k$ הוא ישר המקביל לציר ה- x, ולכן:

(i) כאשר $k>6$ או $k<-6$ יש לישר $y=k$ שתי נקודות משותפות עם גרף הפונקציה.

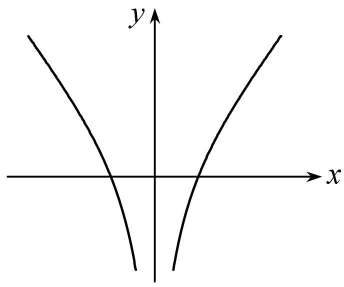
(ii) כאשר $k=6$ או $k=-6$ יש לישר $y=k$ נקודה משותפת אחת עם גרף הפונקציה.

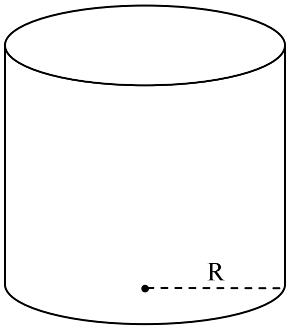
(iii) כאשר $-6<x<6$ אין לישר $y=k$ אף נקודה משותפת עם גרף הפונקציה.

ה) (i) מגרף II נסיק כי $f(x)\neq 0$ לכל x לכן $g'(x)\neq 0$ לכל x.
כלומר אין לפונקציה $g(x)$ נקודות קיצון.

(ii) $g(x)$ עולה כאשר $g'(x)>0$, כלומר כאשר $f(x)>0$,
כלומר כאשר $x>0$. $g(x)$ יורדת כאשר $g'(x)<0$,
כלומר כאשר $f(x)<0$, כלומר כאשר $x<0$.

(iii) גרף אפשרי ל- $g(x)$ המקיים
את כל התנאים שמצאנו ואת הנתון
שגרף $g(x)$ חותך את ציר ה- x
בשתי נקודות.





(7) נתון: $V = 27$ מ״ק .

נסמן את רדיוס הבסיס ב- R

ואת גובה הגליל ב- h .

$$V=\pi R^2 h \;\Rightarrow\; 27=\pi R^2 h$$

$$h=\frac{27}{\pi R^2}$$

נסמן ב- $f(R)$ את הפונקציה המתארת את שטח הפח.

נתון כי המכל פתוח מלמעלה לכן: $f(R) =$ (שטח בסיס תחתון) + (שטח מעטפת)

כלומר: $f(R)=\pi R^2+2\pi R\cdot h=\pi R^2+\frac{54}{R}$

$$f'(R)=2\pi R-\frac{54}{R^2}$$

$$f'(R)=0 \;\Rightarrow\; 2\pi R-\frac{54}{R^2}=0 \;\Rightarrow\; 2\pi R^3=54 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; R^3=\frac{27}{\pi} \;\Rightarrow\; R=\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$$

נבדוק שעבור $R=\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$ שטח הפח מינימלי.

$$f'(R)=2\pi R-\frac{54}{R^2}=2\pi R-54R^{-2}$$

$$f''(R)=2\pi+108R^{-3}=2\pi+\frac{108}{R^3}$$

$$f''\left(\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}\right)=2\pi+\frac{108}{\frac{27}{\pi}}>0 \;\Rightarrow\; \min$$

מסקנה: שטח הפח מינימלי כאשר $R=\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$.

(8) $g'(x)=f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (12x^2-6)\,dx=$

$$=\frac{12x^3}{3}-6x+c=4x^3-6x+c$$

מכיוון שנתון שמשוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=-1$ היא: $y=-2x+5$, הרי ש- $g'(-1)=-2$ (שיפוע המשיק -2 שווה לנגזרת הפונקציה בנקודת ההשקה), ואז:

$$-2=4\cdot(-1)^3-6\cdot(-1)+c$$

$$-2=-4+6+c \;\Rightarrow\; c=-4$$

כלומר:

$$g'(x)=4x^3-6x-4$$

$$g(x)=\int g'(x)\,dx=\int (4x^3-6x-4)\,dx=\frac{4x^4}{4}-\frac{6x^2}{2}-4x+c_1$$

$$g(x)=x^4-3x^2-4x+c_1$$

נמצא את שיעור ה- y של נקודת ההשקה של המשיק הנתון לגרף הפונקציה $g(x)$:

$$y=-2x+5$$

$$x=-1 \;\Rightarrow\; y=2+5=7 \;\Rightarrow\; (-1,7)$$

לכן: $g(-1)=7$ ואז:

$$7=(-1)^4-3(-1)^2-4(-1)+c_1$$

$$7=1-3+4+c_1 \;\Rightarrow\; c_1=5$$

כלומר:

$$g(x)=x^4-3x^2-4x+5$$