פתרון מבחן מס' 21 (ספר מבחנים – שאלון 035804)

(1) נסמן ב- $x\%$ את אחוז ההוזלה הראשונה

ואז $4x\%$ יסמן את אחוז ההוזלה השנייה.

נקבל את המשוואה: $1,200\cdot\frac{100-x}{100}\cdot\frac{100-4x}{100}=912 \quad /\cdot\frac{100\cdot100}{1,200}$

$$(100-x)(100-4x)=7,600$$

$$10,000-400x-100x+4x^2=7,600$$

$$4x^2-500x+2,400=0 \quad /:4 \quad \Rightarrow \quad x^2-125x+600=0$$

$$x_{1,2}=\frac{125\pm\sqrt{125^2-4\cdot600}}{2}=\frac{125\pm115}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1=120\ ,\ x_2=5$$

$x=120$ איננו אפשרי כי הוזלה לא יכולה להיות יותר מ- 100% .

תשובה: המוצר הוזל בפעם הראשונה ב- 5% .

(2) (א) (*i*) נציב $x=0$, $y=5$ במשוואת המעגל.

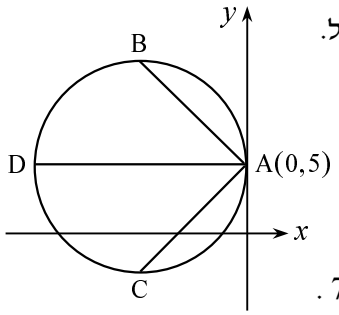
$$(0-a)^2+(5-5)^2=(a+14)^2$$

$$a^2=a^2+28a+196$$

$$28a=-196 \quad \Rightarrow \quad a=-7$$

(*ii*) $(x+7)^2+(y-5)^2=49$

כלומר מרכז המעגל $(-7,5)$ ורדיוסו 7 .



(ב) $A(0,5)$, $m_{AB}=-1$, לכן משוואת AB:

$$y-5=-1\cdot(x-0) \quad \Rightarrow \quad y=-x+5$$

למציאת שיעורי נקודה B (נקודת החיתוך של המיתר AB עם המעגל),

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y=-x+5 \\ (x+7)^2+(y-5)^2=49 \end{cases}$$

$$x^2+14x+49+(-x+5-5)^2=49 \quad \Rightarrow \quad x^2+14x+49+x^2=49$$

$$2x^2+14x=0 \quad \Rightarrow \quad 2x(x+7)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=x_A=0\ ,\ x_2=-7$$

$$x_2=x_B=-7 \quad \Rightarrow \quad y=7+5=12 \quad \Rightarrow \quad B(-7,12)$$

$A(0,5)$, $m_{AC}=1$, לכן משוואת AC:

$$y-5=1\cdot(x-0) \quad \Rightarrow \quad y=x+5$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035804

למציאת שיעורי נקודה C (נקודת החיתוך של AC עם המעגל),
נציב $x+5$ במקום y במשוואת המעגל:

$$(x+7)^2+(x+5-5)^2=49 \Rightarrow x^2+14x+49+x^2=49$$
$$2x^2+14x=0$$

את פתרונות המשוואה הזו כבר מצאנו: $x_1=x_A=0$, $x_2=x_C=-7$

$$x_C=-7 \Rightarrow y_C=-7+5=-2$$

כלומר $C(-7,-2)$.

משוואת AD היא $y=5$ (ישר המקביל לציר ה- x ועובר דרך $A(0,5)$).
נציב במשוואת המעגל $y=5$ ונקבל: $(x+7)^2+(5-5)^2=49$

$$(x+7)^2=49$$
$$x+7=7 \Rightarrow x=0$$
$$x+7=-7 \Rightarrow x=-14$$

כלומר $D(-14,5)$.

(ג) מכיוון ששיעור ה- x של נקודות B ו- C שווה ל- -7,
הרי שמשוואת BC היא $x=-7$. מרכז המעגל $(-7,5)$ נמצא על ישר זה.
כלומר: BC הוא קוטר במעגל.

(3) (א) נתון:

$$P(S)=0.3 \Rightarrow P(\bar{S})=1-0.3=0.7$$
$$P(H/S)=0.8 \ , \ P(S/H)=\tfrac{2}{3}$$

(ב)

$$P(H/S)=0.8 \Rightarrow \frac{P(H\cap S)}{P(S)}=0.8 \Rightarrow \frac{P(H\cap S)}{0.3}=0.8$$

כלומר:

$$P(H\cap S)=0.24$$

$$P(S/H)=\tfrac{2}{3} \Rightarrow \frac{P(S\cap H)}{P(H)}=\tfrac{2}{3} \Rightarrow \frac{0.24}{P(H)}=\tfrac{2}{3} \Rightarrow P(H)=0.36$$

ואז:

$$P(\bar{H})=1-P(H)=1-0.36=0.64$$

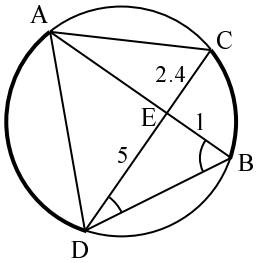
ואז:

$$P(S\cap\bar{H})+P(S\cap H)=P(S)$$
$$P(S\cap\bar{H})+0.24=0.3 \Rightarrow P(S\cap\bar{H})=0.06$$
$$P(S/\bar{H})=\frac{P(S\cap\bar{H})}{P(\bar{H})}=\frac{0.06}{0.64}=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$$

(ג) מכיוון ש- $P(S)\cdot P(H)\neq P(S\cap H)$ ($0.3\cdot 0.36\neq 0.24$)
הרי שהמאורעות S ו- H תלויים.

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035804

(4) (א) נתון: $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}=180°$.



זווית היקפית שווה למחצית הזווית
המרכזית הנשענת על אותה הקשת

לכן: $\measuredangle CDB+\measuredangle ABD=\frac{180°}{2}=90°$,

ואז: $\measuredangle DEB=90°$ כי סכום זוויות ב- ΔDEB הוא $180°$,

כלומר $AB\perp DC$.

(ב) $EC=DC-DE=7.4-5=$ 2.4 ס"מ

טענה	נימוק
$\measuredangle ACE=\measuredangle EBD$	זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת $\overset{\frown}{AD}$ שוות.
$\measuredangle AEC=\measuredangle BED$	זוויות קדקודיות שוות.
$\Downarrow$	
$\Delta ACE\sim\Delta DBE$	לפי משפט דמיון ז.ז.
$\Downarrow$	
$\frac{AE}{DE}=\frac{CE}{BE}$	פרופורציית צלעות במשולשים דומים.
$AE\cdot BE=CE\cdot DE$	
$\Downarrow$	
$AE\cdot 1=2.4\cdot 5$	הצבת הנתונים.
$\Downarrow$	
$AE=$ 12 ס"מ	

מכיוון שמשולש AED הוא ישר-זווית ($\measuredangle E=90°$),

הרי שלפי משפט פיתגורס:

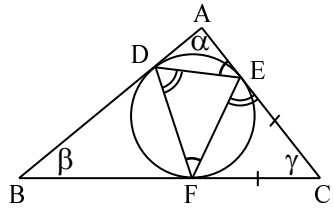
$AD^2=AE^2+ED^2$

$AD^2=12^2+5^2$

$AD^2=169 \Rightarrow AD=$ 13 ס"מ

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035804

(5)



טענה	נימוק
$FC = EC$	שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
$\measuredangle CEF = \frac{180° - \gamma}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$	זוויות בסיס שוות במשולש שווה-שוקיים EFC וסכום זוויות במשולש הוא $180°$.

באופן דומה:

$\measuredangle AED = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$	במשולש שווה-שוקיים ADE .
$\measuredangle DFE = \measuredangle AED = 90° - \frac{\alpha}{2}$ $\measuredangle FDE = \measuredangle CEF = 90° - \frac{\gamma}{2}$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני.
ואז $\measuredangle DEF = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2}$	סכום זוויות ב- ΔDEF הוא $180°$.

לפי משפט הסינוסים ב- ΔDEF :

$$\frac{DF}{\sin \measuredangle DEF} = 2r \;\Rightarrow\; DF = 2r \sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)$$

$$\frac{DE}{\sin \measuredangle DFE} = 2r \;\Rightarrow\; DE = 2r \sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 2r \cos\frac{\alpha}{2}$$

ואז:

$$S_{\Delta DEF} = \frac{DE \cdot DF \sin \measuredangle EDF}{2} = \frac{2r\cos\frac{\alpha}{2} \cdot 2r \sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \cdot \sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)}{2} =$$

$$= 2r^2 \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

אבל:

$$\frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{180° - \beta}{2} = 90° - \frac{\beta}{2}$$

לכן:

$$S_{\Delta DEF} = 2r^2 \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(90° - \frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\frac{\gamma}{2} = 2r^2 \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035804

(6) (א) $y = x - \mathrm{m}\sqrt{x} + \mathrm{n} \;\Rightarrow\; y' = 1 - \frac{\mathrm{m}}{2\sqrt{x}}$

נתון: $y'(9) = 0 \;,\; y(9) = 4$, לכן:

$$-4 = 9 - \mathrm{m}\cdot\sqrt{9} + \mathrm{n}$$

$$0 = 1 - \frac{\mathrm{m}}{2\sqrt{9}}$$

ממשוואה שנייה נקבל: $\frac{\mathrm{m}}{6} = 1$, כלומר: $\mathrm{m} = 6$, ואז:

$$-4 = 9 - 6\cdot 3 + \mathrm{n} \;\Rightarrow\; \mathrm{n} = 5$$

תשובה: $\mathrm{m} = 6 \;,\; \mathrm{n} = 5$ (כלומר: $y = x - 6\sqrt{x} + 5$).

(ב) $x \geq 0$ (הביטוי שנמצא מתחת לשורש אינו שלילי).

(ג) $x = 0 \;\Rightarrow\; y = 5 \;\Rightarrow\; (0,5)$

$$y = 0 \;\Rightarrow\; 0 = x - 6\sqrt{x} + 5$$

נסמן $\sqrt{x} = \mathrm{t}$ ואז $x = \mathrm{t}^2$ ונקבל:

$$0 = \mathrm{t}^2 - 6\mathrm{t} + 5$$

$$\mathrm{t}_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \;\Rightarrow\; \mathrm{t}_1 = 5 \;,\; \mathrm{t}_2 = 1$$

ואז: $\sqrt{x} = 5 \;\Rightarrow\; x = 25$ או $\sqrt{x} = 1 \;\Rightarrow\; x = 1$

כלומר נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים:

$(0,5)$, $(1,0)$, $(25,0)$.

(ד) $y' = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}}$

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{3}{\sqrt{x}} = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{x} = 3 \;\Rightarrow\; x = 9 \;\Rightarrow\; (9,-4)$$

כלומר $(9,-4)$ זו הנקודה היחידה בה $y' = 0$.

x	$x = 0$	$0 < x < 9$	$x = 9$	$x > 9$
y'		$-$	0	$+$
y		↘	min	↗

$y'(1) = 1 - \frac{3}{1} < 0$

$y'(16) = 1 - \frac{3}{4} > 0$

ולכן הפונקציה עולה בתחום $x > 9$ ויורדת בתחום $0 \leq x < 9$.

(ה) נמצא את המינימום המוחלט של הפונקציה.

מכיוון שהפונקציה מוגדרת ורציפה לכל $x \geq 0$ ו- $(9,-4)$ זו נקודת המינימום היחידה של הפונקציה, הרי שהמינימום המוחלט של הפונקציה עבור $x \geq 0$ הוא -4 , כלומר לכל $x \geq 0$ מתקיים: $y \geq -4$,

כלומר: $x - 6\sqrt{x} + 5 \geq -4$ לכל $x \geq 0$

ואז: $x - 6\sqrt{x} + 9 \geq 0$ לכל $x \geq 0$.

© כל הזכויות שמורות להוצאת שבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035804

(7) (א) כאשר נגזרת הפונקציה חיובית הפונקציה עולה, וכאשר נגזרת הפונקציה שלילית הפונקציה יורדת, לכן לפי הגרפים של הנגזרות של הפונקציות נסיק: תחומי העלייה של $f(x)$: $x>5$, $1<x<5$.

תחום הירידה של $f(x)$: $x<1$.

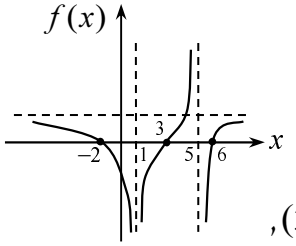
תחום העלייה של $g(x)$: $1<x<5$.

תחומי הירידה של $g(x)$: $x>5$, $x<1$.

תחומי העלייה של $h(x)$: $x>5$, $1<x<5$, $x<1$

(הפונקציה $h(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה).

(ב) **הגרף של $f(x)$:** ניעזר בנקודות $(6,0)$, $(3,0)$, $(-2,0)$,

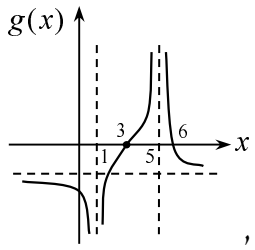


באסימפטוטה האופקית $y=1$, באסימפטוטות האנכיות $x=1$, $x=5$,

ובתחומי העלייה והירידה שמצאנו בסעיף (א),

ונקבל את הסרטוט (משמאל):

הגרף של $g(x)$: ניעזר בנקודות $(6,0)$, $(3,0)$,

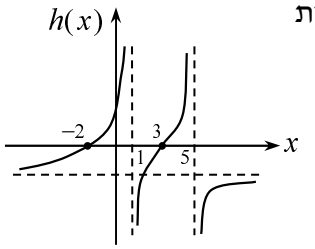


באסימפטוטה האופקית $y=-1$, באסימפטוטות האנכיות $x=1$, $x=5$,

ובתחומי העלייה והירידה שמצאנו בסעיף (א),

ונקבל את הסרטוט (משמאל):

הגרף של $h(x)$: ניעזר בנקודות $(3,0)$, $(-2,0)$,



באסמפטוטה האופקית $y=-1$, באסימפטוטות האנכיות $x=1$, $x=5$,

ובכך שהפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה,

ונקבל את הסרטוט (משמאל):

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035804

(8) הנקודה $M(2,12)$ נמצאת על גרף הפונקציה הראשונה, לכן שיעוריה מקיימים את המשוואה.

נציב את שיעורי הנקודה $M(2,12)$ בפונקציה $y = a\,x^2 + b\,x$

ונקבל: $12 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2$

כלומר: $12 = 4a + 2b \quad / : 2$

$6 = 2a + b \;\Rightarrow\; b = 6 - 2a$

ניעזר בכך ששטח הנתון הוא $6\frac{2}{3}$ ונקבל:

$$\int_0^2 \left[(ax^2 + bx) - 3x^2 \right] dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} - x^3 \right)\Big|_0^2 = \left(\frac{8a}{3} + 2b - 8 \right) - 0 =$$

$$= \frac{8a}{3} + 2(6 - 2a) - 8 =$$

$$= \frac{8a}{3} + 12 - 4a - 8 = 4 - \frac{4a}{3}$$

לפי הנתון: $4 - \frac{4a}{3} = 6\frac{2}{3} \quad / \cdot 3 \;\Rightarrow\; 12 - 4a = 20$

$4a = -8 \;\Rightarrow\; a = -2$

$b = 6 - 2 \cdot (-2) = 10$

© כל הזכויות שמורות להוצאת משבצת (www.mishbetzet.co.il) – ספר מבחנים לשאלון 035804

גבי יקואל



www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◊ לכל הכיתות ◊ לכל השאלונים ◊ לכל הרמות