פתרון מבחן מס' 39 (ספר מבחנים – שאלון 035805)

(1) נתון: $a_{n+1}=3\cdot a_n$, מכאן: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3=\text{const}$.

כלומר, הסדרה $\{a_n\}$ היא סדרה הנדסית שמנתה $q=3$.

(א)
$$b_n=a_n+3a_{n+1}=a_n+3(a_n\cdot 3)=10a_n$$
$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{10a_{n+1}}{10a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}=3=\text{const}$$

כלומר, הסדרה $\{b_n\}$ היא סדרה הנדסית שמנתה $q=3$.

(ב)
$$a_1=2 \;\Rightarrow\; a_2=a_1\cdot q=2\cdot 3=6$$
$$b_1=a_1+3\cdot a_2=2+3\cdot 6=20$$
$$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n=S_n^{\{b\}}=b_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=20\cdot\frac{3^n-1}{3-1}=10(3^n-1)$$

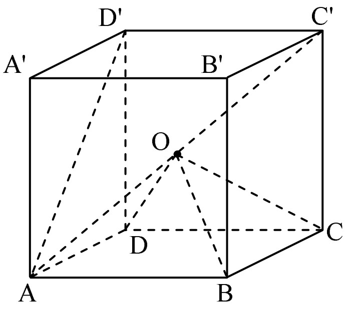
(ג)
$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}=2\cdot\frac{3^n}{3}=\frac{2}{3}\cdot 3^n$$
$$15(a_{n+1}-a_n)=15(3a_n-a_n)=15\cdot 2a_n=$$
$$=30a_n=30\cdot\tfrac{2}{3}\cdot 3^n=20\cdot 3^n$$
$$2S_n+20=2\cdot 10\cdot(3^n-1)+20=20\cdot 3^n-20+20=20\cdot 3^n$$

מכאן נובע: $15(a_{n+1}-a_n)=2S_n+20$.

(2) (א) נתון: $P=6\cdot S_{\text{בסיס}}$, לכן:
$$2\cdot S_{\text{בסיס}}+4\cdot S_{\text{פאה}}=6\cdot S_{\text{בסיס}}$$
$$4\cdot S_{\text{פאה}}=4\cdot S_{\text{בסיס}} \;\Rightarrow\; S_{\text{פאה}}=S_{\text{בסיס}} \;\Rightarrow\; a\cdot h=a^2 \;\Rightarrow\; h=a$$

מכאן שכל מקצועות התיבה שווים, לכן התיבה היא קובייה.

(ב) הזווית המבוקשת (בין AC'
לבין המישור $ADD'A'$)
היא הזווית בין AC'
לבין היטלו על המישור $ADD'A'$,
כלומר AD' , כלומר $\measuredangle C'AD'$.
לפי משפט פיתגורס ב- $\Delta ADD'$:



המשך בעמוד הבא >>>

$AD'^2 = AD^2 + DD'^2 \quad \Rightarrow \quad AD'^2 = a^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad AD' = a\sqrt{2}$

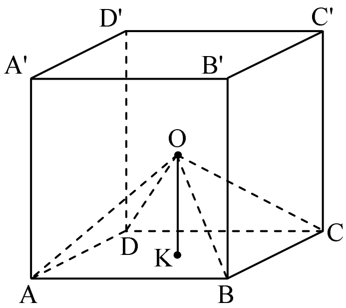
במשולש $AD'C'$: $\tan \measuredangle A = \frac{D'C'}{AD'} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\measuredangle A = \measuredangle D'AC' \approx 35.264°$

(ג) $V = 512$ סמ"ק $\quad \Rightarrow \quad a^3 = 512$ סמ"ק $\quad \Rightarrow \quad a = 8$ ס"מ

אלכסון הקובייה: $AC' = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ ס"מ

(ד) $V_{OABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot h$.



OK – גובה הפירמידה OABCD ,
הוא אורך האנך מנקודה O
לבסיס ABCD .
OK הוא קטע אמצעים ב- $\Delta AC'C$
(חוצה צלע AC' ומקביל לצלע CC'),
לכן: $OK = \frac{1}{2} C'C = \frac{1}{2} a$
(קטע אמצעים במשולש שווה למחצית הצלע אותה הוא לא חותך).

$V_{OABCD} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6} = \frac{8^3}{6} = 85\frac{1}{3}$ סמ"ק

(3) נתונות הפונקציות:

$$f(x) = x(\ln^2 x - a\ln x + 5)$$
$$g(x) = 4x(\ln x - 1)$$

(א) (*i*)

$$f'(x) = 1 \cdot (\ln^2 x - a\ln x + 5) + x \cdot (2\ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{a}{x}) =$$
$$= \ln^2 x - a\ln x + 5 + 2\ln x - a =$$
$$= \ln^2 x + \ln x(2 - a) + 5 - a$$

(*ii*)

$$g'(x) = 4[1 \cdot (\ln x - 1) + x \cdot \frac{1}{x}] = 4(\ln x - 1 + 1) = 4\ln x$$

(ב) (*i*)

$$f'(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad \ln^2 1 + \ln 1(2 - a) + 5 - a = 3$$
$$0 + 0 \cdot (2 - a) + 5 - a = 3 \quad \Rightarrow \quad 5 - a = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

(*ii*)

$$f''(x) = (\ln^2 x + 3)' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$$
$$f''(1) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

הנקודה $x = 1$ היא נקודה חשודה לקיצון בפונקציה $f'(x)$.

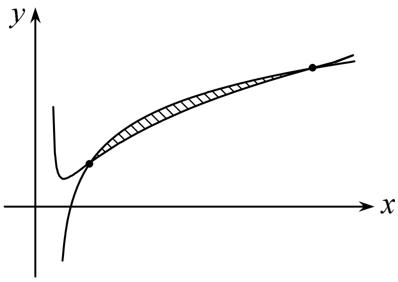
המשך בעמוד הבא ◄◄◄

x	x = 0	0 < x < 1	x = 1	x > 1
f″(x)	נקודת אי-הגדרה	−	0	+
f′(x)		↘	min	↗

$f''(0.5)=2\cdot\ln 0.5\cdot 2<0 \quad , \quad f''(2)=2\cdot\ln 2\cdot 0.5>0$

לכן בנקודה $x=1$ לפונקציה $f'(x)$ יש נקודת מינימום.

ג) (i)



$$f'(x)=g'(x)$$
$$\ln^2 x+3=4\ln x$$
$$\ln^2 x-4\ln x+3=0$$
$$(\ln x)_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}$$
$$(\ln x)_1=3 \ , \ (\ln x)_2=1$$

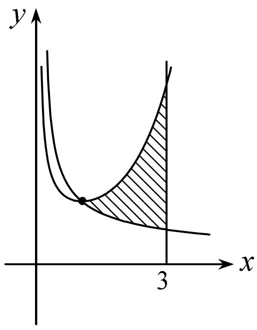
$$\ln x=1 \ \Rightarrow \ x=e \ \Rightarrow \ y=4\ln e=4$$
$$\ln x=3 \ \Rightarrow \ x=e^3 \ \Rightarrow \ y=4\ln e^3=12$$

תשובה: $(e,4)$, $(e^3,12)$.

(ii)

$$\mathrm{I}=\int_e^{e^3}[f'(x)-g'(x)]dx=[f(x)-g(x)]\Big|_e^{e^3}=$$
$$=f(e^3)-g(e^3)-f(e)+g(e)=$$
$$=e^3(3^2-2\cdot 3+5)-4e^3(3-1)-e(1^2-2\cdot 1+5)+4e(1-1)=$$
$$=8e^3-8e^3-4e+0=-4e$$

האינטגרל שלילי, לכן: $S=-\mathrm{I}=$ $4e$ יחידות שטח



(4) נתונות הפונקציות:

$$f(x)=e^{x-\mathrm{a}}+\frac{2}{\sqrt{x}}=e^{x-\mathrm{a}}+2x^{-\frac{1}{2}}$$

ו- $g(x)=\frac{9}{\sqrt{10x-1}}=9(10x-1)^{-\frac{1}{2}}$.

(א) תחום הגדרה:

$f(x)$: $x\geq 0$ וגם $\sqrt{x}\neq 0$

כלומר תחום ההגדרה: $x>0$,

$g(x)$: $10x-1\geq 0$ וגם $\sqrt{10x-1}\neq 0$

$10x-1>0 \;\Rightarrow\; x>\frac{1}{10}$

(ב) (*i*)

$$f'(x)=e^{x-\mathrm{a}}-x^{-1.5}=e^{x-\mathrm{a}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$f'(1)=0 \;\Rightarrow\; e^{1-\mathrm{a}}-1=0$$

$$e^{1-\mathrm{a}}=1 \;\Rightarrow\; 1-\mathrm{a}=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{a}=1$$

(*ii*)

$$f''(x)=e^{x-1}+1.5x^{-2.5}=e^{x-1}+\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$

$$f''(1)=e^0+\frac{3}{2}>0 \;\Rightarrow\; \min$$

(*iii*)

$$g(1)=\frac{9}{\sqrt{10-1}}=\frac{9}{3}=3$$

$$f(1)=e^0+\frac{2}{1}=1+2=3$$

$f(1)=g(1)$, לכן הגרפים נחתכים בנקודה $(1,3)$,
שהיא נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.

(ג)

$$\mathrm{I}=\int_1^3[f(x)-g(x)]dx=\int_1^3\left[e^{x-1}+2x^{-\frac{1}{2}}-9(10x-1)^{-\frac{1}{2}}\right]dx=$$

$$=\left(e^{x-1}+\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{9\,(10x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot 10}\right)\Bigg|_1^3=\left(e^{x-1}+4\sqrt{x}-\frac{18\,\sqrt{10x-1}}{10}\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=e^2+4\sqrt{3}-\frac{9\sqrt{29}}{5}-\left(1+4-\frac{27}{5}\right)=$$

$=e^2+4\sqrt{3}-\frac{9\sqrt{29}}{5}+0.4\approx$ 5.024 יחידות שטח

(5) נתונה הפונקציה $f(x)=\sin^3 x+5\sin x$ בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

(א) + (ב) $f'(x)=3\sin^2 x\cdot\cos x+5\cos x$

$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \cos x(3\sin^2 x+5)=0$

$3\sin^2 x+5=0$ לא יכול להתקיים, כי $3\sin^2 x\ge 0$ לכל x ,

לכן גם $3\sin^2 x+5>0$ לכל x .

$\cos x=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{2}+\pi n \;,\; n\in\mathbb{Z}$

בתחום הנתון: $x=\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; y=1^3+5\cdot 1=6$

$x=-\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; y=(-1)^3+5\cdot(-1)=-6$

$\left(\frac{\pi}{2},6\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2},-6\right)$.

נחשב את ערכי הפונקציה בנקודות הקצה של תחום ההגדרה:

$x=\pi \;\Rightarrow\; y=0^3+5\cdot 0=0 \;\Rightarrow\; (\pi,0)$

$x=-\pi \;\Rightarrow\; y=0^3+5\cdot 0=0 \;\Rightarrow\; (-\pi,0)$

הפונקציה $f(x)$ רציפה, לכן: $y=6 \;\Rightarrow\; \max$

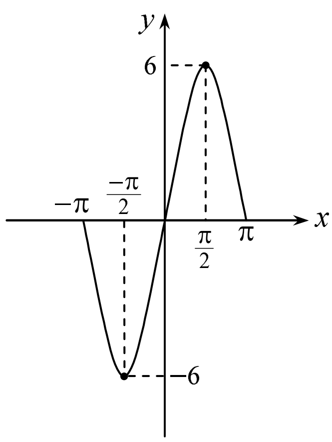
$y=-6 \;\Rightarrow\; \min$

מקסימום קצה $(-\pi,0)$

מינימום מוחלט $\left(-\frac{\pi}{2},-6\right)$

מקסימום מוחלט $\left(\frac{\pi}{2},6\right)$

מינימום קצה $(\pi,0)$



(ג) משיקים בנקודת הקיצון מקבילים לציר ה- x

ומשוואותיהם: $y=-6$, $y=6$.

המרחק בין מקבילים אלה: $d_1=6-(-6)=$ 12 יחידות אורך

המרחק בין האנכים לציר ה- x בנקודות הקצה:

$d_2=\pi-(-\pi)=$ 2π יחידות אורך

היקף המלבן היוצר: $P=2(12+2\pi)=$ $24+4\pi$ יחידות אורך

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ד) **<u>דרך I :</u>**

$\sin x \le 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^3 x \le 1$

$\sin x \le 1 \quad \Rightarrow \quad 5\sin x \le 5$

מכאן : $\sin^3 x + 5\sin x \le 6$,

כלומר למשוואה : $\sin^3 x + 5\sin x = 7$ אין פתרון.

<u>דרך II :</u>

מהגרף רואים שהערך המקסימלי של הפונקציה הוא 6 .

בנוסף, המחזור של הפונקציה הוא 2π , לכן : $f(x) \le 6$ לכל x ,

ואז אין פתרון למשוואה $f(x) = 7$, כלומר אין פתרון

למשוואה הנתונה.

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◊ לכל הכיתות ◊ לכל השאלונים ◊ לכל הרמות