

פתרונות מבחון מס' 10 (ספר מבחנים – שאלון 035805)

$$S = 2, |q| < 1$$

(1) נתון :

בסדרה נתון כי כל איבר גדול פי 3 מסכום האיברים הבאים אחריו.

$$a_n = 3 \cdot (S - S_n)$$

כלומר עבור כל n טبعי מתקיים :

$$a_1 = 3(S - a_1) \Rightarrow a_1 = 3(2 - a_1)$$

עבור $a_1 = 1$ נקבל :

$$a_1 = 6 - 3a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}$$

$$S = 2 \Rightarrow \frac{a_1}{1-q} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}}{1-q} = 2$$

$$1-q = \frac{3}{4} \Rightarrow q = \frac{1}{4}$$

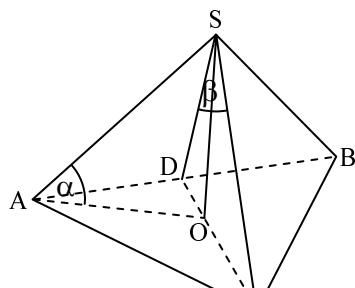
הסדרה : $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots$ היא גם סדרה הנדסית אינסופית, שבה :

$$A_1 = a_1^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{לכן זו סדרה הנדסית יורדת}$$

סכום איברי הסדרה :

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots = \frac{A_1}{1-Q} = \frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{15}{16}} = \frac{36}{15} = 2.4$$



(2) נתון :

$SA = SB = SC$ (בפירמידה ישרה,

המקצועות הצדדיםים שווים זה לזה).

$$AB = BC = AC$$

$$SO \perp ABC, SO = \frac{1}{2}AB$$

נסמן : $AB = BC = AC = a$

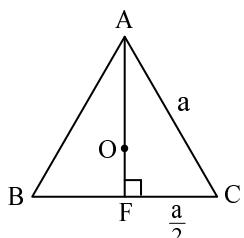
(א) הזוויות בין המקצוע הצדדי SA

. לבין הבסיס ABC היא $\angle SAO$.

. נקודה O היא מרכז המרجل החוסם את $\angle ABC$

, $AF \perp BC$, $\angle ABC$

. ו- AF הוא גם תיכון.

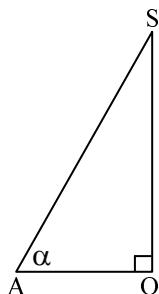


המשך בעמוד הבא ▶▶

דרך ראשונה:

$$AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{לפי משפט פיתגורס :}$$

נקודות חיתוך התיוכנים מחלקת כל תיכון ביחס 1:2.



$$AO = \frac{2}{3}AF = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad : \Delta SAO$$

$$\tan \alpha = \frac{SO}{AO} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\angle SAO = \alpha \approx 40.89^\circ \quad \text{מכאן קיבל :}$$

דרך שנייה:

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow AO = R = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{לפי משפט הסינוסים ב- } \Delta ABC \text{ נקבע :}$$

$$\tan \alpha = \frac{SO}{AO} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha \approx 40.89^\circ \quad : \Delta SAO$$

(ב) נתון כי משולש ABC הוא משולש שווה-צלעות, לכן כל התיוכנים שוים זה לזה.

$$AF = DC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AO = CO = \frac{2}{3}DC = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \text{ואז :}$$

↓

$$DO = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

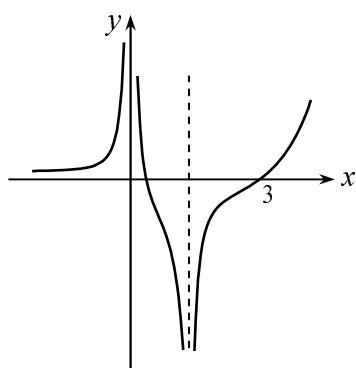
$$SO = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2} \quad \text{לפי הנתון :}$$

$\angle DSC = \angle DSO + \angle CSO = \beta$ נתבונן ב- ΔDSC ונסמן :

$$\tan \angle DSO = \frac{DO}{SO} = \frac{a}{2\sqrt{3}} : \frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle DSO = 30^\circ \quad : \Delta SOD$$

$$\tan \angle CSO = \frac{CO}{SO} = \frac{a\sqrt{3}}{3} : \frac{a}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle CSO \approx 49.11^\circ \quad : \Delta SOC$$

$\beta = \angle DSO + \angle CSO = 30^\circ + 49.11^\circ = 79.11^\circ$ הزاوية המבוקשת :



$$(3) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{e^x}{ax^2 - 3x}$$

בສרטוט מtauואר גראף הפונקציה הנגזרת

של הפונקציה הנתונה.

(א) נגזרת הפונקציה:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(ax^2 - 3x) - e^x(2ax - 3)}{(ax^2 - 3x)^2} = \\ &= \frac{e^x(ax^2 - 3x - 2ax + 3)}{(ax^2 - 3x)^2} \end{aligned}$$

. לפי הגרף:

$$\frac{e^3(a \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 2a \cdot 3 + 3)}{(a \cdot 3^2 - 3 \cdot 3)^2} = 0 \quad \text{נציב בנגזרת הפונקציה ונקבל:}$$

$$\frac{e^3(9a - 9 - 6a + 3)}{(9a - 9)^2} = \frac{e^3(3a - 6)}{(9a - 9)^2} = 0 \Rightarrow 3a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = \frac{e^x}{2x^2 - 3x} \quad (b)$$

$$2x^2 - 3x \neq 0 \Rightarrow x(2x - 3) \neq 0$$

לכן, תחומי ההגדרה:

(א) $x = 0$ אינו שייך לתחומי ההגדרה.

לכן, אין לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- y .

שיעוריו נקודות החיתוך של גראף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$f(x) = \frac{e^x}{2x^2 - 3x} = 0 \Rightarrow e^x = 0 \quad \text{אבל אז:}$$

זה לא יתכן כי $e^x > 0$ לכל ערך של x .

כלומר אין לגרף הפונקציה הנתונה נקודות חיתוך עם הצירים.

המשך בעמוד הבא ▶▶

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x(2x^2 - 3x - 4x + 3)}{(2x^2 - 3x)^2} = 0 \quad (4)$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = \frac{e^3}{18-9} = \frac{e^3}{9} \quad , \quad y_2 = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{-1} = -\sqrt{e} \approx -1.65$$

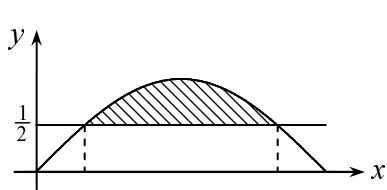
לפי גраф הנגזרת אפשר לקבוע:

(ה) תחומי העלייה של הפונקציה (כשהנגזרת חיובית):

$$x > 3 \quad , \quad 0 < x < \frac{1}{2} \quad , \quad x < 0$$

תחומי הירידה של הפונקציה (כשהנגזרת שלילית):

$$\frac{3}{2} < x < 3 \quad , \quad \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$



(4) הפונקציה המתוארת בgraf $y = \sin \frac{x}{2}$
בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

נמצא קודם את שיעורי ה- x
של נקודות החיתוך של הישר
עם גרף הפונקציה (גבולות האינטגרציה).

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{או} \quad \frac{x}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$= \frac{\pi}{3} + 4\pi n \quad \text{או} \quad x = \frac{5\pi}{3} + 4\pi k$$

כלומר:

כאשר $n, k \in \mathbb{Z}$

בתחום הנתון נמצאות הנקודות שאלה שיעורי ה- x שלחן:

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = \left(-2 \cos \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} =$$

$$= -2 \cos \frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} - \left(-2 \cos \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} =$$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi \approx 1.37$$

$$y = 2 \ln x - \ln^2 x = \ln x(2 - \ln x) \quad (5)$$

(א) תחום ההגדרה: $x > 0$

(ב) אין לגרף הפונקציה נקודת חיתוך עם ציר ה- y מאחר ש- $y = 0$ אינו שיבץ בתחום ההגדרה.

שיעוריו נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x :

$$\ln x(2 - \ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \quad \text{או} \quad \ln x = 2$$

$$x = 1 \quad \text{או} \quad x = e^2$$

כלומר: $(1, 0), (e^2, 0)$

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{x} - 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \cdot (1 - \ln x) \quad (6)$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{2}{x} \cdot (1 - \ln x) = 0 \Rightarrow (1 - \ln x) = 0$$

$$\ln x = 1 \Rightarrow x = e, y = 2 - 1^2 = 1$$

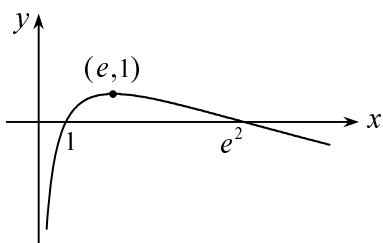
x	$0 < x < e$	$x = e$	$x > e$
y'	+	0	-
y	\nearrow	max	\searrow

$$y'(1) = \frac{2}{1}(1 - 0) > 0$$

$$y'(e^2) = \frac{2}{e^2}(1 - 2) < 0$$

כלומר: $\max(e, 1)$

(7)





טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

❖ לכל ה大雨ות ❖ לכל השאלונים ❖ לכל הרמות