פתרון מבחן מס' 8 (ספר מבחנים – שאלון 035805)

(1) (א)

$$b_1 = a_1 + a_3 = a_1(1+q^2)$$
$$b_2 = a_2 + a_4 = a_1q(1+q^2)$$
$$b_3 = a_3 + a_5 = a_1q^2(1+q^2)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$b_n = a_n + a_{n+2} = a_1q^{n-1}(1+q^2)$$

(ב) נוכיח כי הסדרה $b_n = a_1q^{n-1}(1+q^2)$ היא סדרה הנדסית.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_1q^n(1+q^2)}{a_1q^{n-1}(1+q^2)} = q = \text{קבוע}$$

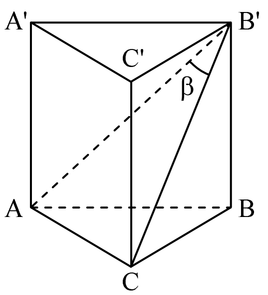
כלומר הסדרה $\{b_n\}$ היא סדרה הנדסית שמנתה היא q

והאיבר הראשון שלה הוא $b_1 = a_1(1+q^2)$.

(ג)
$$S_n = b_1\frac{q^n-1}{q-1} = a_1(1+q^2)\frac{q^n-1}{q-1}$$

(2) נתון: $\sphericalangle ACB = 90°$, $AB = a\sqrt{2}$

$CA = CB$, $\sphericalangle CB'A = \beta$



קודם נוכיח כי $B'C \perp AC$ ($\sphericalangle ACB' = 90°$).

$B'B$ מאונך למישור ABC (מנסרה ישרה),

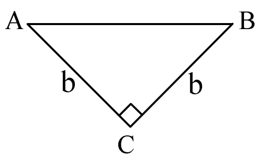
לכן, $B'B \perp BC$.

BC הוא היטל של משופע $B'C$ על המישור ABC .

$AC \perp CB$ (נתון)

$AC \perp B'C$ (לפי המשפט על שלושת האנכים: אם ישר במישור (AC) מאונך להיטל המשופע (BC) אז הוא מאונך גם למשופע ($B'C$).

(א) במשולש ישר-זווית ושווה-שוקיים ABC :



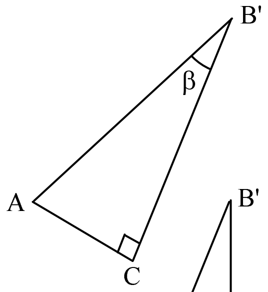
$AC = BC = b$

לפי משפט פיתגורס $AB^2 = AC^2 + CB^2$

$$(\sqrt{2}a)^2 = b^2 + b^2 \;\Rightarrow\; 2a^2 = 2b^2 \;\Rightarrow\; b = a$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

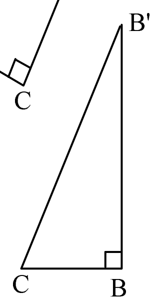
המשך בעמוד הבא ⮜⮜⮜



נתבונן ב- $\Delta ACB'$:

$$\tan\beta = \frac{AC}{CB'} \Rightarrow B'C = \frac{AC}{\tan\beta} = \frac{a}{\tan\beta}$$

נתבונן ב- $\Delta CBB'$:



לפי משפט פיתגורס :

$$B'B = \sqrt{B'C^2 - BC^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{\tan^2\beta} - a^2} = \frac{a}{\tan\beta}\cdot\sqrt{1-\tan^2\beta}$$

לכן, נפח המנסרה :

$$V = S_{\Delta ABC}\cdot B'B = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{a}{\tan\beta}\cdot\sqrt{1-\tan^2\beta}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{1-\tan^2\beta}}{2\tan\beta} \text{ יחידות נפח}$$

(ב) שטח מעטפת המנסרה :

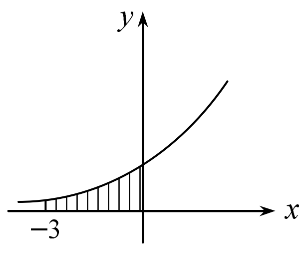
$$M = (AB+AC+BC)\cdot BB' =$$

$$= (\sqrt{2}a + a + a)\cdot\frac{a}{\tan\beta}\sqrt{1-\tan^2\beta} =$$

$$= \frac{a^2(2+\sqrt{2})\sqrt{1-\tan^2\beta}}{\tan\beta} \text{ יחידות שטח}$$

(3)

$$A>0 \ , \ f(x) = A\cdot 2^x$$



נתון :

$$S_{\text{מקווקו}} = \frac{7}{2\cdot\ln 2}$$

$$S_{\text{מקווקו}} = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} A\cdot 2^x\,dx =$$

$$= A\int_{-3}^{0} 2^x\,dx = A\cdot\left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_{-3}^{0} =$$

$$= \frac{A}{\ln 2}\left(2^0 - 2^{-3}\right) =$$

$$= \frac{A}{\ln 2}\left(1-\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{8}\cdot\frac{A}{\ln 2}$$

לפי הנתון :

$$\frac{7}{8}\cdot\frac{A}{\ln 2} = \frac{7}{2\cdot\ln 2} \Rightarrow A = 4$$

(4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\mathrm{a}\sin^2 x-\mathrm{b}x$

נתון: $f'\left(\frac{5\pi}{12}\right)=0$

(א) $f'(x)=\mathrm{a}\cdot 2\sin x\cdot\cos x-\mathrm{b}=\mathrm{a}\sin 2x-\mathrm{b}$

$$f'\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\mathrm{a}\sin\frac{2\cdot 5\pi}{12}-\mathrm{b}=\mathrm{a}\cdot\sin\frac{5\pi}{6}-\mathrm{b}=\frac{1}{2}\mathrm{a}-\mathrm{b}$$

לפי הנתון: $f'\left(\frac{5\pi}{12}\right)=0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{a}}{2}-\mathrm{b}=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{a}=2\mathrm{b}$

(ב) $\mathrm{a}>0\;,\;0\le x\le 2\pi$

$$f'(x)=\mathrm{a}\sin 2x-\mathrm{b}=2\mathrm{b}\sin 2x-\mathrm{b}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 2\mathrm{b}\sin 2x-\mathrm{b}=0 \;\Rightarrow\; \sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+2\pi\mathrm{n} \qquad , \qquad 2x=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi\mathrm{k}$$

$$x=\frac{\pi}{12}+\pi\mathrm{n} \qquad \mathrm{n,k}\in Z \qquad x=\frac{5\pi}{12}+\pi\mathrm{k}$$

בתחום $[0,2\pi]$ נמצאות הנקודות החשודות לקיצון (כולל קצות התחום), ששיעורי ה- x שלהם הם:

$$x=0\;,\;x=\frac{\pi}{12}\;,\;x=\frac{5\pi}{12}\;,\;x=\frac{13\pi}{12}\;,\;x=\frac{17\pi}{12}\;,\;x=2\pi$$

נקבע את סוגן של נקודות הקיצון.

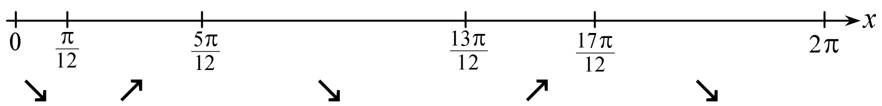
$$f''(x)=2\mathrm{a}\cos 2x\;,\;\mathrm{a}>0$$

$$f''\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\mathrm{a}\cdot\cos\frac{\pi}{6}>0 \;\Rightarrow\; \min$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2\mathrm{a}\cos\frac{5\pi}{6}<0 \;\Rightarrow\; \max$$

$$f''\left(\frac{13\pi}{12}\right)=2\mathrm{a}\cos\frac{13\pi}{6}=2\mathrm{a}\cos\frac{\pi}{6}>0 \;\Rightarrow\; \min$$

$$f''\left(\frac{17\pi}{12}\right)=2\mathrm{a}\cos\frac{17\pi}{6}=2\mathrm{a}\cos\frac{5\pi}{6}<0 \;\Rightarrow\; \max$$



שיעורי ה- x של נקודות המקסימום: $x=\frac{17\pi}{12}\;,\;x=\frac{5\pi}{12}\;,\;x=0$

שיעורי ה- x של נקודות המינימום: $x=2\pi\;,\;x=\frac{13\pi}{12}\;,\;x=\frac{\pi}{12}$

תחומי עלייה: $\frac{13\pi}{12}<x<\frac{17\pi}{12}\;,\;\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}$

תחומי ירידה: $\frac{17\pi}{12}<x\le 2\pi\;,\;\frac{5\pi}{12}<x<\frac{13\pi}{12}\;,\;0\le x<\frac{\pi}{12}$

(5) נתון: $y = ax^{\frac{2}{3}} + bx \ , \ y(8) = 4 \ , \ y'(8) = 0$

(א) $y'(x) = \frac{2}{3}ax^{-\frac{1}{3}} + b = \frac{2a}{3x^{\frac{1}{3}}} + b$

על סמך הנתונים אפשר לקבל מערכת משוואות:

$$\begin{cases} a \cdot 8^{\frac{2}{3}} + 8b = 4 \\ \frac{2a}{3 \cdot 8^{\frac{1}{3}}} + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 8b = 4 \\ \frac{a}{3} + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ a = -3b \end{cases}$$

$$-3b + 2b = 1 \ \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 3 \end{cases}$$

(ב) $x \ge 0$ (הבסיס אי-שלילי)

(ג) $y' = 0 \ \Rightarrow \ \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} - 1 = 0 \ \Rightarrow \ \sqrt[3]{x} = 2 \ \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$

אבל יש גם נקודת קיצון בקצה של התחום: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

לפי השוואת ערכי ה- y אפשר להסיק כי: $\max(8,4) \ , \ \min(0,0)$

(ד) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y: $x = 0 \ \Rightarrow \ y = 0$

נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x: $y = 0$

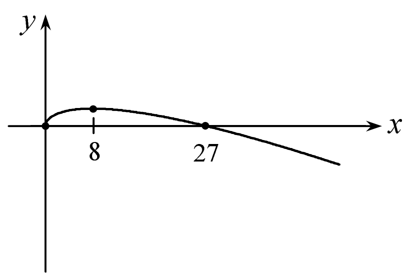
$3\sqrt[3]{x^2} - x = 0 \ \Rightarrow \ \sqrt[3]{x^2}\left(3 - \sqrt[3]{x}\right) = 0$

$\sqrt[3]{x^2} = 0$ או $3 - \sqrt[3]{x} = 0$

$x = 0$ או $\sqrt[3]{x} = 3 \ \Rightarrow \ x = 27$

$(0,0) \ , \ (27,0)$

סקיצה:



גבי יקואל