פתרון מבחן מס' 8 (ספר מבחנים – שאלון 035804)

(1) נסמן את סכום הקנייה של המניה הראשונה ב- x ש"ח.

נבטא את סכום הקנייה של המניה השנייה ב- $(7,000-x)$ ש"ח.

כעבור שנה מחיר המניה הראשונה הוא: $\frac{100+12}{100}\cdot x =$ ש"ח $1.12x$

ומחיר המניה השנייה הוא: $\frac{100+8}{100}\cdot(7,000-x) =$ ש"ח $1.08(7,000-x)$

לאחר מכירת המניה השנייה והשקעת כל הסכום במניה הראשונה, ערך השקעה בתחילת השנה השנייה:

$$1.12x+1.08(7,000-x)=1.12x+7,560-1.08x=0.04x+7,560$$

כעבור שנה נוספת ערך המניה הראשונה עלה ב- 15%, כלומר, כעת ערכה:

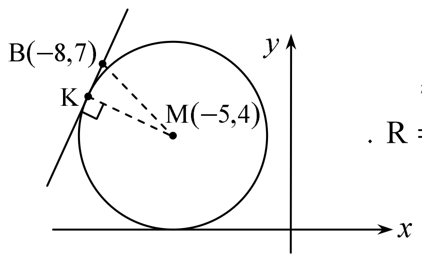
$$\frac{100+15}{100}\cdot(0.04x+7,560)=1.15(0.04x+7,560)$$

לפי נתוני השאלה: $1.15(0.04x+7,560)=8,832 \ / :1.15$

$$0.04x+7,560=7,680 \ \Rightarrow\ 0.04x=120 \ \Rightarrow\ x=3,000$$

תשובה: האדם קנה את המניה הראשונה ב- $3,000$ ש"ח

ואת המניה השנייה ב- $4,000$ ש"ח.



(2) (א) המעגל משיק לציר ה- x (ראו סרטוט),

לכן, $R=|y_M|=|4|=$ יחידות אורך 4.

משוואת המעגל הנתון היא:

$$(x+5)^2+(x-4)^2=16$$

(ב) $MB=\sqrt{(x_B-x_M)^2+(y_B-y_M)^2}=\sqrt{(-8+5)^2+(7-4)^2}$

$MB=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=$ יחידות אורך $3\sqrt{2}$

$3\sqrt{2}\approx 4.24 > R=4$

כלומר הנקודה B נמצאת מחוץ למעגל.

המשך בעמוד הבא >>>

(ג) נקודה K נקודת השקה (ראו סרטוט).

המשיק למעגל BK מאונך לרדיוס MK בנקודת ההשקה K.

לפי משפט פיתגורס ב- ΔMBK : $BK^2 = BM^2 - MK^2$

$BK^2 = 18 - 16 = 2 \Rightarrow BK = \sqrt{2}$ יחידות אורך

(3) נתון:

$P(\bar{A}) = 0.3$

$P(B/A) = 0.9$

$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{12}{19}$

	B	$\bar{B}$	
A	0.63	0.07	0.7
$\bar{A}$	0.18	**0.12**	0.3
	0.81	0.19	1

(א) $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.3 = 0.7$

$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.9 = \frac{P(A \cap B)}{0.7} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.63$

$P(\bar{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.63 = 0.07$

נסמן: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = x$, ואז:

$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.3 - x$

$P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.07 + x$

לפי הנתון: $P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{12}{19} \Rightarrow \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{12}{19} \Rightarrow \frac{x}{0.07 + x} = \frac{12}{19}$

$19x = 0.84 + 12x \Rightarrow 7x = 0.84 \Rightarrow x = 0.12$

נמלא את מה שמצאנו בטבלה למעלה ונקבל:

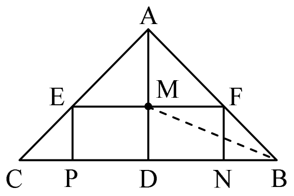
$P(A \cap \bar{B}) = 0.07$, $P(\bar{B}) = 0.19$

(ב) $P(\text{הצלחה לפחות באחת הבחינות}) = P(A \cup B) =$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.81 - 0.63 = 0.88$

אפשר לחשב גם כך:

$P(\text{הצלחה לפחות באחת הבחינות}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0.12 = 0.88$



(4) 15 ס"מ $AB = AC =$, 18 ס"מ $BC =$,

$EF \parallel CB$, $FN \perp BC$, $EP \perp BC$.

(א) מרכז המעגל החסום במשולש נמצא

בנקודת חיתוך חוצי-זוויות המשולש,

לכן, BM חוצה-זווית B , ו- AD חוצה זווית A ב- ΔABC .

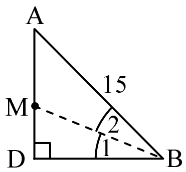
(ב) במשולש שווה-שוקיים חוצה זווית הראש הוא גם גובה ותיכון לבסיס,

$CD = DB$, $AD \perp BC$

לכן: $CD = BD = \frac{BC}{2} = \frac{18}{2} =$ 9 ס"מ

לפי משפט פיתגורס ב- ΔACD : $AD^2 = AC^2 - CD^2$

$AD^2 = 225 - 81 = 144 \Rightarrow AD =$ 12 ס"מ



(ג) נתבונן ב- ΔADB . $\measuredangle D = 90°$, 9 ס"מ $= DB$.

15 ס"מ $= AB$, 12 ס"מ $AD=$ (מצאנו בסעיף (ב)).

נסמן: $AM = x$, ואז $MD = 12 - x$.

לפי משפט חוצה-זווית: $\frac{AM}{MD} = \frac{AB}{DB} \Rightarrow \frac{x}{12-x} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

(חוצה-זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לקטעים, שהיחס ביניהם, שווה ליחס בין הצלעות המתאימות הכולאות את הזווית).

$\frac{x}{12-x} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3x = 60 - 5x \Rightarrow 8x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{8} =$ 7.5 ס"מ

$MD = 12 - 7.5 =$ 4.5 ס"מ , $AM =$ 7.5 ס"מ

(ד) $S_{EFNP} = EF \cdot FN$, $FN = MD =$ 4.5 ס"מ

נמצא את אורך EF :

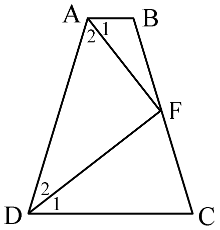
לפי משפט תאלס המורחב ($EF \parallel CB$): $\frac{EF}{CB} = \frac{AF}{AB}$

במשולשים דומים, היחס בין הגבהים שווה ליחס בין הצלעות המתאימות.

לכן: $\frac{AM}{AD} = \frac{AF}{AB}$. מכאן נקבל: $\frac{EF}{CB} = \frac{AM}{AD}$

נציב את הידוע ונקבל: $\frac{EF}{18} = \frac{7.5}{12} \Rightarrow EF = \frac{18 \cdot 7.5}{12} =$ 11.25 ס"מ

מכאן: $S_{EFNP} = 11.25 \cdot 4.5 =$ 50.625 סמ"ר



(5) נתון: $AB \parallel DC$, $AD = BC$, $\measuredangle D_1 = \measuredangle D_2$

$AB = b$, $\measuredangle FAB = \beta$

$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2 = \beta$

$\measuredangle ADC + \measuredangle BAD = 180°$ כזוג זוויות חד-צדדיות

בין ישרים מקבילים, ולכן: $\measuredangle ADC = 180° - \measuredangle BAD = 180° - 2\beta$

מכאן: $\measuredangle D_1 = \measuredangle D_2 = \frac{180 - 2\beta}{2} = 90° - \beta$

זוויות בסיס שוות בטרפז שווה-שוקיים. לכן: $\measuredangle DAB = \measuredangle ABC = 2\beta$

סכום הזוויות ב- ΔABF הוא $180°$:

$$\measuredangle AFB = 180° - \beta - 2\beta = 180° - 3\beta$$

ולפי משפט הסינוסים:

$$\frac{AF}{\sin 2\beta} = \frac{AB}{\sin(180° - 3\beta)} \Rightarrow \frac{AF}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin 3\beta} \Rightarrow AF = \frac{b\sin 2\beta}{\sin 3\beta}$$

ב- ΔAFD לפי משפט הסינוסים: $\frac{AF}{\sin(90° - \beta)} = \frac{DF}{\sin\beta}$

$$\frac{b\sin 2\beta}{\sin 3\beta \cos\beta} = \frac{DF}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{b \cdot 2\sin\beta \cancel{\cos\beta}}{\sin 3\beta \cancel{\cos\beta}} = \frac{DF}{\sin\beta} \Rightarrow DF = \frac{2b\sin^2\beta}{\sin 3\beta}$$

ב- ΔDCF לפי משפט הסינוסים: $\frac{DF}{\sin(180° - 2\beta)} = \frac{DC}{\sin\measuredangle DFC}$

בטרפז שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות. לכן: $\measuredangle C = \measuredangle D = 180° - 2\beta$

$$\measuredangle DFC = 180° - (90° - \beta) - (180° - 2\beta) = 3\beta - 90°$$

(סכום הזוויות ב- ΔDCF הוא $180°$), ואז:

$$\frac{2b\sin^2\beta}{\sin 3\beta \sin 2\beta} = \frac{DC}{\sin(3\beta - 90°)}$$

$$\frac{2b\sin^2\beta}{\sin 3\beta \cdot 2\sin\beta\cos\beta} = \frac{DC}{-\cos 3\beta}$$

$$DC = -\frac{b\sin\beta\cos 3\beta}{\cos\beta\sin 3\beta} = -\frac{b\tan\beta}{\tan 3\beta}$$

(6) $f(x)=\frac{x^2-9}{x^4-81}$

(א) תחום ההגדרה של הפונקציה: $x^4-81\neq 0$

$x^4\neq 81 \Rightarrow x\neq \pm 3$

(ב) $\frac{x^2-9}{x^4-81}=\frac{x^2-9}{(x^2-9)(x^2+9)}=\frac{1}{x^2+9}$

אפשר לחלק את המונה ואת המכנה ב- (x^2-9)

בתנאי: $(x^2-9)\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 3$

כלומר עבור $x\neq \pm 3$, $f(x)=\frac{1}{x^2+9}$.

(ג) היות וחזקת המונה (2) קטנה מחזקת המכנה (4),

משוואת האסימפטוטה האופקית היא: $y=0$

(ד) נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y : $x=0$

$y=\frac{1}{0+9}=\frac{1}{9} \Rightarrow \left(0,\frac{1}{9}\right)$

נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x : $y=0$

$0=x^2-9 \Rightarrow x=\pm 3$

נקודות אלו אינן שייכות לתחום ההגדרה, לכן **אין** נקודות חיתוך

עם ציר ה- x .

(ה) $f'(x)=\left(\frac{x^2-9}{x^4-81}\right)'=\left(\frac{1}{x^2+9}\right)'=-\frac{2x}{(x^2+9)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{2x}{(x^2+9)^2}=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0\ ,\ y=\frac{1}{9}$

x	$x<-3$	$x=-3$	$-3<x<0$	$x=0$	$0<x<3$	$x=3$	$x>3$
y'	+	נקודת אי-הגדרה	+	0	−	נקודת אי-הגדרה	−
y	↗		↗	**max**	↘		↘

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

$f'(-4)=-\frac{-8}{+}>0 \qquad f'(-1)=-\frac{-2}{+}>0$

$f'(1)=-\frac{2}{+}<0 \qquad f'(4)=-\frac{8}{+}<0$

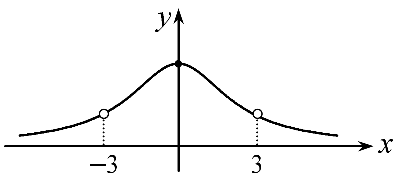
כלומר: $\max\left(0,\frac{1}{9}\right)$.

(ו) $y=\frac{1}{x^2+9}$, $x\neq\pm3$

$y(\pm3)=\frac{1}{3^2+9}=\frac{1}{18}$

לכן בנקודות $\left(\pm3,\frac{1}{18}\right)$

יש "חורים" בגרף הפונקציה.

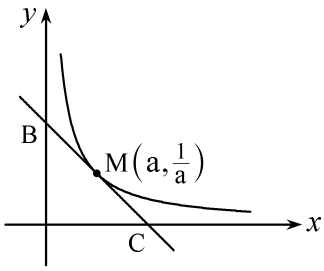


(7) (א) $f(x)=\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

$m_{\text{משיק}}=f'(a)=-\frac{1}{a^2}$

משוואת המשיק: $y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$

$y=-\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}$



(ב) שיעורי נקודה B (נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y):

$x=0 \;\Rightarrow\; y=-\frac{0}{a^2}+\frac{2}{a}=\frac{2}{a} \;\Rightarrow\; B\left(0,\frac{2}{a}\right)$

שיעורי הנקודה C (נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x):

$y=0 \;\Rightarrow\; -\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}=0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{a^2}=\frac{2}{a} \;\Rightarrow\; x=2a \;\Rightarrow\; C(2a,0)$

$BC^2=(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2=(2a-0)^2+\left(0-\frac{2}{a}\right)^2$

$BC^2=4a^2+\frac{4}{a^2}=4\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

(ג) נסמן ב- $F(a)$ את פונקציית המטרה: $F(a)=BC^2$

$$F'(a)=\left(4\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\right)'=4\left(2a-\frac{2}{a^3}\right)$$

נשווה את הנגזרת ל- 0: $F'(a)=0 \Rightarrow 4\left(2a-\frac{2}{a^3}\right)=0$

$$2a-\frac{2}{a^3}=0 \quad /:2\ ,\ \cdot a^3$$

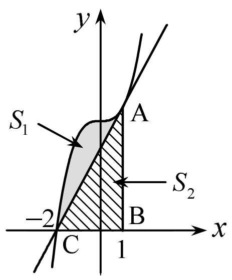
$$a^4-1=0 \Rightarrow a^4=1 \Rightarrow a=\pm1$$

אבל $a>0$, לכן: $a=1$.

$$F''(a)=4\left(2+\frac{6}{a^4}\right) \Rightarrow F''(1)=4(2+6)>0 \Rightarrow \min$$

כלומר, BC^2 מינימלי כאשר $a=1$.

(8) $f'(x)=ax^2$



משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה $x=1$:

$$y=6x+12$$

(א) בנקודת ההשקה: $y=6\cdot1+12=18$

נקודת ההשקה היא: $A(1,18)$.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax^2\,dx=\frac{ax^3}{3}+c$$

$$\begin{cases} f'(1)=6 \\ f(1)=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ \frac{a}{3}+c=18 \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{3}+c=18 \Rightarrow c=16$$

$$f(x)=2x^3+16$$

(ב) נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x:

$$y=0 \Rightarrow 2x^3+16=0 \Rightarrow x^3=-8 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow (-2,0)$$

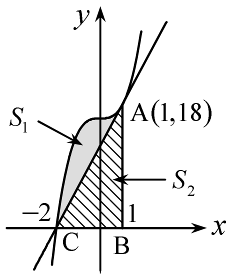
נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x:

$$y=0 \Rightarrow 6x+12=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow (-2,0)$$

המשך בעמוד הבא ◄◄◄

לכן, גרף הפונקציה והמשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=1$,
חותכים את ציר ה- x באותה הנקודה ששיעוריה $(-2,0)$
(נקודה C בסרטוט).

(ג)



$$S_2=S_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot BC}{2}=\frac{(y_A-y_B)\cdot(x_B-x_C)}{2}=$$

$$=\frac{18\cdot 3}{2}=\text{27 יחידות שטח}$$

$$S_1=\int_{-2}^{1}\left(2x^3+16-(6x+12)\right)dx=$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(2x^3-6x+4\right)dx=$$

$$=2\int_{-2}^{1}\left(x^3-3x+2\right)dx=2\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=2\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2-(4-6-4)\right)=2\left(\frac{3}{4}+6\right)=\text{13.5 יחידות שטח}$$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{13.5}{27}=\frac{1}{2}$$

דרך נוספת:

$$S_1+S_2=\int_{-2}^{1}(2x^3+16)dx=\left(\frac{x^4}{2}+16x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}+16-(8-32)=\text{40}\tfrac{1}{2}\text{ יחידות שטח}$$

$$S_1=40\tfrac{1}{2}-27=\text{13.5 יחידות שטח}$$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{13.5}{27}=\frac{1}{2}$$

גבי יקואל

משבצת

www.mishbetzet.co.il

טלפון: 04-8200929

ספרי לימוד וספרי מבחני מתכונת במתמטיקה

◈ לכל הכיתות ◈ לכל השאלונים ◈ לכל הרמות